Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Parte VI

Ecuaciones Diferenciales De Derivadas Parciales

Ing. Ramón Abascal

Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas y Teoría de los Circuitos II en la UTN, Facultad Regional Avellaneda Buenos Aires, Argentina

2006

6 - Ecuaciones Diferenciales de Derivadas Parciales:

6.1 - Ecuaciones de Derivadas Parciales:

En la literatura específica estas ecuaciones suelen ser llamadas "ecuaciones diferenciales parciales", denominación impropia en estricto sentido literal. En realidad se trata de ecuaciones diferenciales en las que las derivadas son parciales y no totales como en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Es por esto que preferimos llamarlas Ecuaciones Diferenciales de Derivadas parciales, o en forma simplificada, Ecuaciones de Derivadas parciales.

En tales ecuaciones aparecen, por regla general:

- una variable dependiente, o función.
- dos o más variables independientes, y
- una o más derivadas parciales de la función respecto de las variables independientes.

Ejemplos:

$$z(x, y) = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} + c\,y = 0$$

La solución de la ecuación consiste precisamente en determinar el valor de la variable dependiente, z en los dos ejemplos anteriores. En otras palabras, encontrar la función

$$z = f(x, y) \tag{6.1}$$

El orden de la derivada parcial más elevada define el orden de la ecuación. En los dos ejemplos mencionados, las ecuaciones son, respectivamente, de primero y de segundo orden.

Al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias tienen soluciones que en general introducen constantes arbitrarias, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales presentan soluciones que introducen una o más funciones arbitrarias de las variables independientes. Veamos el siguiente ejemplo obvio: Sea la ecuación

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \varphi(x, y)$$

Su solución es

$$z(x, y) = \int \varphi(x, y)\, dx + \phi(y)$$

6.2 - Generación de Ecuaciones Diferenciales:

Las Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden constituyen familias de curvas en el plano, o de superficies en el espacio, que tienen un parámetro en común.

Como preparación a su estudio, veremos aquí cómo generar una ecuación diferencial ordinaria(1):

Ejemplo 1: Sea una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, y radio r. Su ecuación en el plano es, como sabemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad r = \text{cte.} \tag{6.2}$$

Si derivamos esta ecuación respecto de x, tenemos:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2x + 2y\,y' = 0$$

De aquí surge la ecuación diferencial ordinaria:

$$x + y\,y' = 0 \tag{6.3}$$

Pero también

$$2\,x\,dx + 2y\,dy = 0$$

Esta es la *ecuación diferencial* de la familia. Al integrar, vemos que efectivamente, la (6.2) es la solución de esta ecuación:

$$2\int x\,dx + 2\int y\,dy = x^2 + y^2 + C = 0 \qquad \text{donde} \qquad C = -r^2$$

La (6.2) es, obviamente, solución de dicha ecuación, cualquiera sea el valor de la constante r; es decir que la ecuación (6.3) tiene infinitas soluciones que difieren entre sí precisamente en el valor de la constante r: En este caso, las infinitas circunferencias de centro en el origen constituyen en sentido estricto una familia muy particular, pues lo único que tienen en común es precisamente el centro en el origen. El único parámetro común que comparten es por tanto el punto (0,0). El valor de "r" identifica a cada uno de los miembros de la familia.

Ejemplo 2: Consideremos en segundo lugar la ecuación de una circunferencia con centro en un punto cualquiera P, de coordenadas a, b:

$$P(a, b)$$

La ecuación de tal circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad r = \text{cte.}$$

Derivando como en el primer ejemplo, resulta:

$$2(x - a) + 2(y - b)\,.\,y' = 0$$

$$y'(y - b) + (x - a) = 0$$

$$\therefore \qquad y' = -\frac{x - a}{y - b}$$

(1) Es usual esta forma de introducir el estudio de las ecuaciones diferenciales, porque proporciona un panorama más completo en el que confluyen el concepto de *familia de ecuaciones*, y su solución.

que es también una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, que caracteriza a una nueva familia de circunferencias: las de centro en P. Los parámetros de la misma son obviamente a y b. También en este caso "r" es el elemento que individualiza a los diferentes miembros de aquella.

6.3 - Ecuación de una Familia de Superficies en el Espacio.

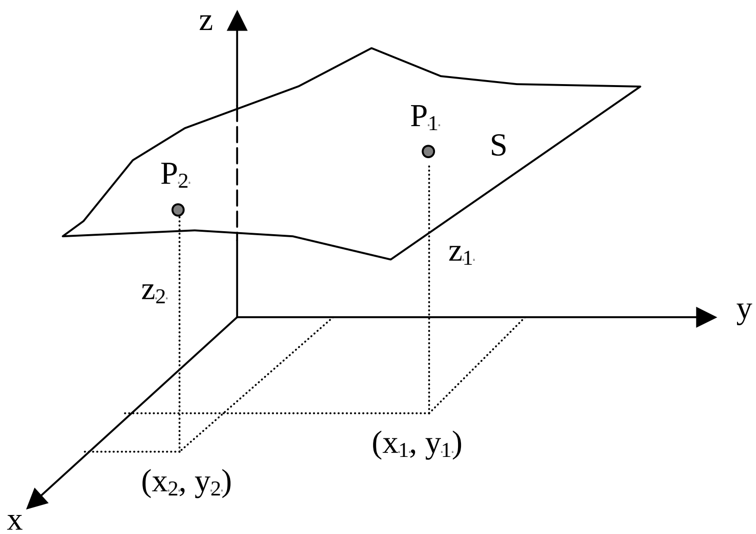
Consideraremos a continuación el caso de una familia de superficies en el espacio. Como sabemos, al igual que una función de dos variables representa una línea en el plano, una función de tres variables

$$\varphi (x, y, z)$$

representa una superficie en el espacio. Una función como ésta puede representarse también en forma explícita respecto de una cualquiera de las variables independientes. Por ejemplo,

$$z (x, y) = 0$$

El hecho de que z sea una función de "x" e "y", $z = f (x, y)$, implica que, para para cada par de valores de las variables x e y, dentro del dominio de la función z, existirá uno (o más) valores de z, tales que el punto P de coordenadas (x, y, z), pertenece a la superficie S, como se muestra en la figura siguiente:



Decimos "uno o más" valores de z, porque la superficie puede eventualmente tener una, o más de una, "hojas". De otra forma, si x e y varían en forma continua, el punto P describirá una hoja de la superficie S.

Si la función no tiene término independiente, la ecuación homogénea:

$$\varphi (x, y, z) = 0 \qquad (6.4)$$

representa a una superficie cónica que contiene al origen de coordenadas. Esto quiere decir que las directrices de dicha superficie cónica pasan por el origen. En efecto, podemos verificar lo dicho con ayuda de un ejemplo cualquiera.

Sea la ecuación:

$$F(x, y, z) = 2x + 3y - z = 0$$

$$\therefore \quad z = 2x + 3y$$

Entonces, si $x = 0$, estamos en presencia de la recta directriz $z = 3y$,

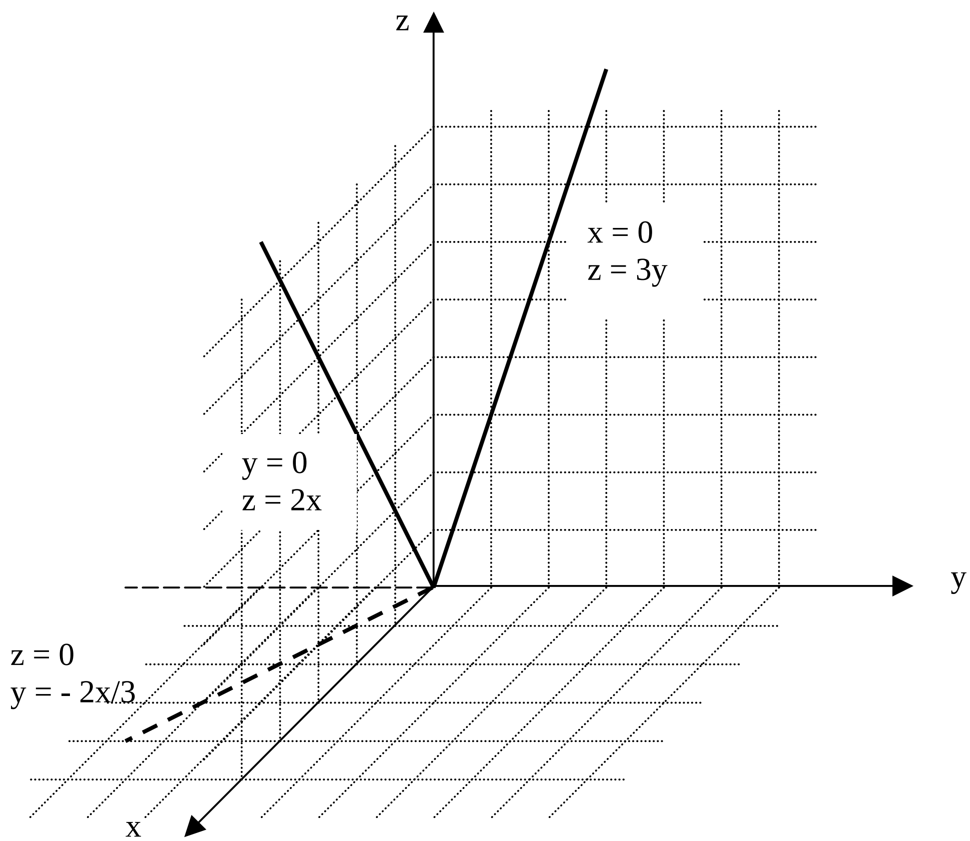
situada en el plano zy y que pasa por el origen. Lo mismo, si $y = 0$, entonces $z = 2x$

es una recta del plano zx. Finalmente, si $z = 0$, y por tanto,

$$y = -\frac{2}{3}x,$$

tenemos una recta ubicada en el plano xy

La figura siguiente muestra las tres rectas directrices, correspondientes a cada plano cartesiano, y obtenidas haciendo nula cada una de las tres variables x, y, z:

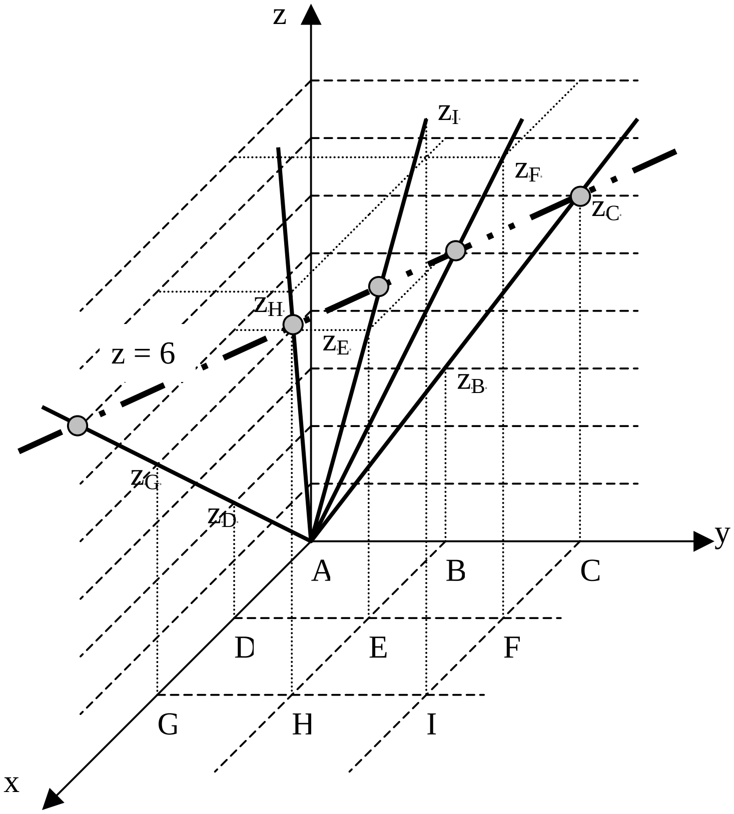


A continuación representamos un conjunto de puntos en el plano xy, y su imagen sobre la superficie representada por la funcion. Para una mejor visibilidad se ha aumentado la escala correspondiente a las coordenadas x e y, sin modificar la que corresponde a z:

Tabla de valores de las coordenadas

Punto	x	y	z
A	0	0	0
B	0	1	3
C	0	2	6
D	1	0	2
E	1	1	5
F	1	2	8
G	2	0	4
H	2	1	7
I	2	2	10

Nota: La línea gruesa cortada corresponde a la ordenada (línea de nivel) z = 6.
Los puntos gruesos identifican las intersecciones de dicha ordenada con las directrices de la superficie.
Ver el gráfico de la pág. siguiente.

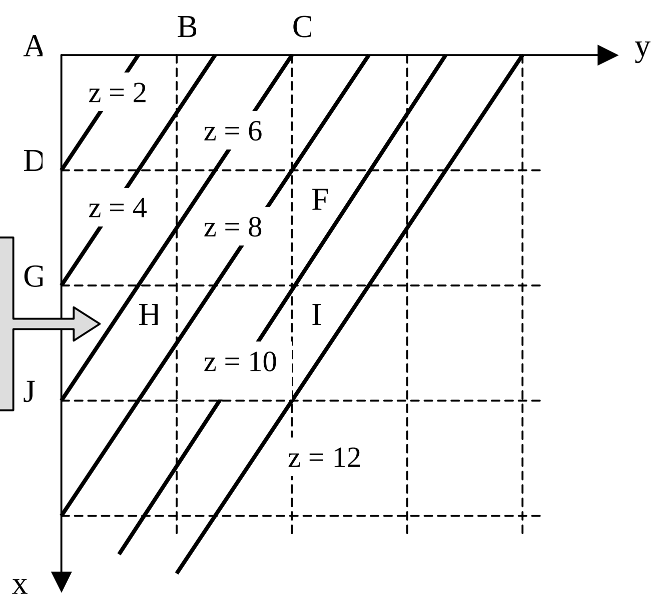


La figura, limitada al primer octante, permite observar la *conicidad* de las directrices de la superficie, aún cuando ésta es, en este caso, un plano inclinado, de extensión infinita, que contiene al origen de coordenadas, como puede verse en la figura siguiente, que muestra las proyecciones sobre el plano xy de las líneas de nivel correspondientes a distintos valores de z constante. Las líneas de nivel mencionadas corresponden a distintos valores positivos de la variable z.

Ejemplo, tabla para z = 8

z	x	y
8	0	8/3
8	1	6/3
8	2	4/4
8	3	2/3
8	4	0

La línea de nivel (z = 6) está representada a título ilustrativo en el gráfico anterior.



Esta última figura, por razones de claridad, está limitada al primer cuadrante, únicamente. El plano representado en ella por las proyecciones de las líneas de nivel para z = constante, obviamente se extiende, lo mismo que las líneas de nivel, a los cuatro cuadrantes.

Las líneas $\overline{AZ_G}$ y $\overline{AZ_C}$, en la primera figura, y sus prolongaciones en ambos sentidos, corresponden a la intersección de la superficie representada por la ecuación que estamos analizando,

$$z = 2x + 3y$$

con los planos zx y zy, respectivamente.

6.4 Ecuación Paramétrica de la Superficie:

Una segunda forma de definir una superficie es la siguiente: Si las variables x, y, z, pueden ser expresadas en función de un parámetro t,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

al variar t en forma tal que x, y, y z varíen en forma continua, las sucesivas posiciones de un punto P (x, y, z) describen una superficie. Por lo que podemos decir que las tres ecuaciones del sistema anterior representan también la superficie, pero en forma paramétrica.

Si derivamos z respecto de t, recordando que es función de x e y, obtendremos la ecuación:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

O, multiplicando por d t:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = z'_x\, dx + z'_y\, dy$$

Para simplificar su escritura, se acostumbra designar con "u" y "v" a las derivadas:

$$z'_x = u \qquad\qquad z'_y = v \qquad (6.5)$$

De tal forma, la ecuación anterior se escribirá así:

$$dz = u\, dx + v\, dy$$

Una *familia de superficies* está representada por una ecuación similar a la (6.4), pero incluyendo un parámetro "a", característico de la familia, y que por consiguiente, la define:

$$\varphi(x, y, z, a) = 0$$

Despejando z en esta ecuación, volvemos a encontrar la relación (6.1), que liga z con las variables independientes x e y:

$$z = f(x, y)$$

Esta igualdad puede escribirse también, en forma implícita, como:

$$z - f(x, y) = 0 \tag{6.6}$$

Ejemplo 1: Sea la ecuación:

$$\varphi(x, y, z, a) = 5x - y + z - 4 = 0$$

$\therefore$ $$z = f(x, y) = y - 5x + 4$$

o también

$$z - (y - 5x + 4) = 0$$

6.5 - Familia de Ecuaciones Diferenciales:

Haces o redes de superficies:

La función

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

representa asimismo una familia de superficies. En este caso es función de dos parámetros, α y β, que la caracterizan. Esta ecuación, que para distinguirla de la anterior, en lugar de familia llamaremos "*haz de superficies*", asociada a la (6.1), nos permite escribir el sistema siguiente:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \\ z = z(x, y) \end{cases} \tag{6.7}$$

Derivando F con respecto de x e y, se obtienen, respectivamente, las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Justificación:

Descompongamos la función F en otras dos, F_1 y F_2, en la primera de las cuales no aparece la variable z, mientras que la segunda es exclusivamente función de z:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = F_1(x, y, \alpha, \beta) + F_2[z(x, y)] = 0 \tag{6.9}$$

Si derivamos respecto de x hallamos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (6.10)$$

Pero de la (6.9) surge la igualdad

$$F_1 (x, y, \alpha, \beta) = - F_2 [z (x, y)]$$

Derivando respecto de x:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = - \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Esta igualdad prueba que el segundo miembro de la (6.10) es nulo, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Lo mismo se puede probar derivando respecto de y.

Ejemplo 1: Sea

$$F (x, y, z, \alpha, \beta) = \operatorname{sen} 4x - x^{-2} + \alpha y^2 - 2 z + \beta = 0$$

Entonces: $z = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - x^{-2} + \alpha y^2 + \beta)$

Derivando

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4 \cos 4x + 2 x^{-3}$$

Lo mismo $\frac{\partial F}{\partial z} = - 2$

y $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} (4 \cos 4x + 2 x^{-3})$

Por tanto: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cos 4x + 2 x^{-3} - (4 \cos 4x + 2 x^{-3}) = 0$

Por lo que respecta a la variable y, en forma similar, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 \alpha y$$

y $\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha y$

Por tanto: $$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 2\alpha y - 2\alpha y = 0$$

Ejemplo 2:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = e^{-x} + e^{-y} + \alpha z - \beta x y = 0$$

Aquí es:

$$z = \frac{1}{\alpha}(\beta x y - e^{-x} - e^{-y})$$

Entonces $$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^{-x} - \beta y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \alpha$$

y $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}(\beta y + e^{-x})$$

Por tanto:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-x} - \beta y + \beta y + e^{-x} = 0$$

La derivada respecto de y es, por su parte:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{-y} - \beta x$$

y $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\alpha}(\beta x + e^{-y})$$

Por tanto: $$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{-y} - \beta x + -e^{-y} - \beta x = 0$$

Estos dos ejemplos confirman la validez de las ecuaciones (6.8).

Volvamos ahora al sistema de ecuaciones (6.7) que caracteriza al haz de superficies:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \\ z = z(x, y) \end{cases} \tag{6.7}$$

Las diferenciales totales de las funciones "F" y "z" son, respectivamente:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \tag{6.11}$$

y $$d\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d\,y \qquad (6.12)$$

Al reemplazar (6.12) en la (6.11), obtenemos

$$d\,F = \frac{\partial F}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial F}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\,d\,y =$$

$$d\,F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) d\,x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) d\,y = 0$$

Esta última ecuación es igual a cero, pues los términos entre paréntesis son ambos nulos, según acabamos de probar.

De todo lo anterior resulta, entonces, un sistema formado por tres ecuaciones, las dos que hemos reunido en el sistema (6.8) más la igualdad:

$$F\,(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

Notemos que las ecuaciones (6.8) contienen las mismas variables que F más, respectivamente, las derivadas parciales de z respecto de x e y. Por lo tanto, se pueden expresar como funciones implícitas de las variables mencionadas, haciendo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \therefore \qquad \Phi_1\left(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \therefore \qquad \Phi_2\left(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

A partir de aquí, recordando que hemos llamado (6.5):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = u \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = v$$

el sistema de tres ecuaciones mencionado más arriba puede ser formulado así:

$$\begin{cases} \Phi_1\,(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ u) = 0 \\ \Phi_2\,(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ v) = 0 \\ F\,(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

Si eliminamos α y β en este sistema, obtendremos una ecuación diferencial que no es función de los dos parámetros. La llamaremos:

$$\Psi\,(x,\ y,\ z,\ z'_x,\ z'_y) = \Psi\,(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0$$

Esta ecuación representa de forma genérica un haz de superficies en el espacio. Analizaremos como ejemplo, y para fijar ideas, el siguiente caso, muy obvio:

$$z = \alpha x + \beta y + \alpha \beta \tag{6.13}$$

Las derivadas de z respecto de "x" e "y" son, respectivamente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \beta$$

Si hacemos:

$$F = \alpha x + \beta y + \alpha \beta - z = 0,$$

reemplazando α y β obtenemos la ecuación diferencial que buscábamos generar:

$$z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

y que, simbólicamente, se puede escribir también de la siguiente forma:

$$z = x \,.\, z'_x + y \,.\, z'_y + z'_x \,.\, z'_y = x u + y v + u v \tag{6.14}$$

Trataremos ahora de encontrar su solución. Ensayemos con $z = - x y$. Si derivamos respecto de x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - y \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - x$$

y reemplazamos estos resultados en la (6.14), verificamos que la solución elegida es correcta. En efecto:

$$z = - x y - y x + x y = - x y$$

6.6 - Generación de Ecuaciones Diferenciales cuya Familia de Soluciones contiene una Función Arbitraria:

Trataremos aquí el problema de establecer una ecuación diferencial de derivadas parciales tal que su familia de soluciones contenga una función arbitraria dada.

Ejemplo 1:

Por ejemplo, tratemos de generar la ecuación diferencial que representa a la familia de funciones

$$w = \upsilon u^2 + \eta v^2 + \tau t^2 \tag{6.15}$$

donde υ, η y τ son los parámetros variables que identifican a cada función de la familia. Entonces, como en el último ejemplo de la Sección anterior, podemos definir la función implícita:

$$\Omega = \upsilon u^2 + \eta v^2 + \tau t^2 - w = 0$$

Si derivamos la (6.15) respecto de cada una de las variables, resulta

$$\frac{\partial w}{\partial u} = w'_u = 2\,\upsilon\, u$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = w'_v = 2\,\eta\, v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w'_t = 2\,\tau\, t$$

Multipliquemos ahora ambos miembros de la (6.15) por 2, y a continuación reemplacemos el valor de las tres derivadas anteriores. Obtenemos:

$$2\,w = 2\,\upsilon\, u^2 + 2\,\eta\, v^2 + 2\,\tau\, t^2 = u\,.\,w'_u + v\,.\,w'_v + t\,.\,w'_t$$

$$\therefore \qquad u\,\frac{\partial w}{\partial u} + v\,\frac{\partial w}{\partial v} + t\,\frac{\partial w}{\partial t} - 2\,w = 0$$

Esta es la ecuación diferencial buscada, cuya solución es, naturalmente, la (6.15)

Veremos a continuación la forma general de resolver el problema que estamos planteando en esta Sección: Hallar una ecuación diferencial

$$\varphi\,(f, g) = 0$$

en la cual

$$f = f\,(x, y, z)$$

y

$$g = g\,(x, y, z)$$

son dos funciones arbitrarias dadas. Y z, por su parte, es una función de x e y:

$$z = z\,(x, y)$$

Calcularemos a continuacion la diferencial total de $\varphi\,(f, g)$:

$$d\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial f}\,d f + \frac{\partial \varphi}{\partial g}\,d g = 0 \tag{6.16}$$

De modo enteramente similar a como hicimos en el parágrafo anterior a partir de las ecuaciones (6.11) y (6.12), obtenemos, en este caso:

$$d f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) d x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) d y = 0$$

y

$$d g = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) d x + \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) d y = 0$$

Reemplazando en la (6.16):

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial f}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right\} +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial g}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right\} = 0$$

O bien, reordenando esta última ecuación:

$$d\varphi = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} dx +$$

$$+ \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} dy = 0$$

Esta igualdad debe cumplirse para cualquier valor de las variables x e y, pues no se ha hecho ninguna salvedad a su respecto. Por lo tanto es condición necesaria que cada una de las sumas encerradas entre llaves sea igual a cero.

Es decir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

y también

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

De aquí, despejando los primeros miembros en ambas igualdades, obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Al dividir ambas miembro a miembro llegamos a la razón siguiente:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}} \tag{6.17}$$

Recordemos que en una razón, el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Aplicando aquí esa propiedad y restando ambos productos entre sí, obtenemos la ecuación:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

A continuación vamos a efectuar los productos indicados:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)=0$$

Simplificando el último paréntesis, que es nulo, como se ve, y despejando el primer sumando, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

Si tenemos en cuenta que tanto el primer miembro como los términos entre paréntesis del segundo son respectivamente los Jacobianos[(1)]

$$R=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\qquad U=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\qquad V=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}$$

podemos escribir finalmente, en forma simbólica:

$$R=U\frac{\partial z}{\partial x}+V\frac{\partial z}{\partial y}$$

que es la ecuación diferencial buscada.

En lo que sigue analizaremos algunos ejemplos de familias de soluciones en las que el vínculo consiste en que contienen determinadas funciones comunes a la familia.

(2) Sean las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$. Se denomina Jacobiano, en homenaje al matemático alemán Carl Jacobi, a la expresión:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ejemplo 2: Encontrar una ecuación de derivadas parciales cuya solución sea una dada función de $z - x$ y de $z - y$:

$$\Phi\,(z - x,\ z - y) = 0$$

Llamemos:

$$f = z - x \qquad y \qquad g = z - y$$

De aquí podemos derivar las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 1$$

Aplicando la ecuación (6.17), resulta la siguiente igualdad:

$$\frac{-1 + z'_x}{0 + z'_y} = \frac{0 + z'_x}{-1 + z'_y}$$

de la que, igualando productos de medios y extremos, obtenemos:

$$1 - z'_x - z'_y + z'_x\, z'_y = z'_x\, z'_y$$

$$\therefore \qquad z'_x + z'_y = 1$$

Esta es la ecuación buscada. Veremos a continuación algunos ejemplos dentro de esta familia de ecuaciones, que certifican lo dicho:

Ejemplo 2.1:

Sea $\Phi\,(z - x,\ z - y) = (z - x)^2 - (z - y)^2 = 0$

Operando, obtenemos:

$$z^2 - 2\,x\,z + x^2 - z^2 + 2\,z\,y - y^2 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2\,z\,(x - y) = 0$$

$$\therefore \qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{1}{2}\,(x + y)$$

De aquí: $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

Ejemplo 2.2: Consideremos ahora la ecuación:

$$\Phi\,(z - x,\ z - y) = z - x = 0$$

$$\therefore \qquad z = x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + 0 = 1$$

Ejemplo 2.3:

$$\operatorname{sen}(z - x) + \operatorname{sen}(z - y) = 0$$

$\therefore$ $\operatorname{sen}(z - x) = -\operatorname{sen}(z - y) = \operatorname{sen}(y - z)$

De aquí: $z - x = y - z$

$\therefore$ $2z = x + y$

$\therefore$ $z = \frac{1}{2}(x + y)$

Es decir que este caso se reduce al ejemplo 2.1 anterior.

Ejemplo 3: Consideraremos ahora una función de $z - x^2$ y de $z + y^2$:

$$\Phi(z - x^2, \; z + y^2) = 0$$

Hagamos:

$$f = z - x^2 \qquad y \qquad g = z + y^2$$

De aquí salen las siguientes diferenciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 1$$

Entonces, aplicando la (6.17), se obtiene:

$$\frac{-2x + z'_x}{0 + z'_y} = \frac{0 + z'_x}{2y + z'_y}$$

de donde :

$$-4xy + 2yz'_x - 2xz'_y + z'_x z'_y = z'_x z'_y$$

$\therefore$ $-4xy + 2yz'_x - 2xz'_y = 0$

Simplificando, obtenemos la ecuación de la familia, que resulta ser:

$$yz'_x - xz'_y - 2xy = 0 \qquad (6.18)$$

Ejemplo 3.1:

$$\Phi = f(x, y) + g(x, y) = z - x^2 + (z + y^2) = 0$$

De aquí, resulta:

$$2z = x^2 - y^2$$

$$\therefore \qquad z = \frac{1}{2}\,(x^2 - y^2)$$

Derivando respecto de x e y,

$$\therefore \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -y$$

Y por tanto, reemplazando en la ecuación de la familia, que acabamos de obtener (6.18):

$$y\,z'_x - x\,z'_y - 2xy = 0$$

comprobamos que, efectivamente:

$$yx + yx - 2xy = 0$$

Ejemplo 3.2: Sea la función:

$$\Phi = e^f - 1 = 0$$

Entonces, $e^{z - x^2} = 1$

Para que se cumpla esta igualdad, debe ser, evidentemente:

$$z = x^2$$

Y si derivamos respecto de x e y como de costumbre, obtenemos, respectivamente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Al reemplazar estos valores, comprobamos que satisface la ecuación (6.18) de la familia. En efecto:

$$2xy - 2xy = 0$$

Ejemplo 3.3: Veamos aquí la función

$$\Phi = \operatorname{sen} f + \operatorname{sen} g = 0$$

Si reemplazamos los valores que hemos definido para f y para g, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(z - x^2) = -\operatorname{sen}(z + y^2) = \operatorname{sen}[-(z + y^2)]$$

Para que las dos funciones extremas sean iguales, deben serlo sus argumentos respectivos, es decir:

$$z - x^2 = -z - y^2$$

$$\therefore \qquad 2z = x^2 - y^2$$

Y nos encontramos en idéntica situación que en el ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.4: Para este ejemplo elegiremos la función

$$\Phi = 3\,f - 2\,g + 2 = 0$$

$$\therefore \qquad 3\,z - 3\,x^2 - 2\,z - 2\,y^2 + 2 = 0$$

Despejando de aquí z, tenemos:

$$z = 3\,x^2 + 2\,y^2 - 2$$

Las derivadas parciales de z (x, y), son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6\,x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4\,y$$

Por fin, si reemplazamos en la ecuación de la familia, verificamos que:

$$6\,x\,y - 4\,y\,x - 2\,x\,y = 0$$

Ejemplo N° 4:

Nos proponemos con este ejemplo encontrar la ecuación diferencial de la familia de todos los planos que pasan por el origen de coordenadas. La ecuación correspondiente a esta familia es:

$$F\,(x, y, z) = a\,x + b\,y + c\,z = 0$$

Despejando la variable dependiente, z, obtenemos:

$$z = -\frac{a}{c}\,x - \frac{b}{c}\,y \tag{6.19}$$

Y, derivando F respecto de x e y, resulta el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = a + c\left(\dfrac{-a}{c}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = b + c\left(\dfrac{-b}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

Por otra parte, como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{c}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b}{c}$$

la ecuación (6.19) de la familia de planos puede por lo tanto expresarse como una ecuación diferencial:

$$z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

o bien: $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

Ejemplo N° 5:

Trataremos en este caso de hallar la ecuación diferencial de la familia de esferas de radio R cuyo centro está ubicado sobre el eje de coordenas x. La ecuación algebraica correspondiente es, como sabemos:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

A partir de aquí podemos obtener la expresión de la función F:

$$F = x^2 - 2ax + a^2 - R^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{6.20}$$

Como venimos haciéndolo en los ejemplos vistos hasta aquí, a partir de esta última ecuación podemos derivar el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2a + 2z.z'_x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2z.z'_y = 0 \end{cases} \tag{6.21}$$

De la primer ecuación se deduce que

$$a = x + z.z'_x \tag{6.22}$$

Al reemplazar el valor del parámetro "a" en la (6.20) resulta:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - \underbrace{2x^2 - 2xz.z'_x}_{-2ax} + \underbrace{x^2 + 2xz.z'_x + z^2.z'^2_x}_{a^2} - R^2 = 0$$

Simplificando, hallamos:

$$F = y^2 + z^2 + z^2.z'^2_x - R^2 = 0$$

A continuación reemplazaremos la variable "y" por su valor despejado en la ecuación (6.21):

$$y = -z.z'_y \quad \therefore \quad y^2 = z^2.z'^2_y$$

Llegamos al resultado siguiente:

$$z^2.z'^2_y + z^2 + z^2.z'^2_x - R^2 = 0$$

que es la ecuación diferencial de la familia, y que puede reformularse más sencillamente sacando factor común z^2:

$$z^2 (z'^2_x + z'^2_y + 1) - R^2 = 0$$

O también, explicitando las derivadas parciales:

$$z^2 \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right\} - R^2 = 0$$

Verificaremos seguidamente que, en efecto, ésta es la ecuación buscada. De la (6.22), se deduce que

$$z \,.\, z'_x = a - x$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a - x}{z}$$

También, a partir de la (6.21), podemos ver que:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{- y}{z}$$

Al reemplazar estos valores en la ecuación de la familia, obtenemos:

$$z^2 \left\{ \frac{(a - x)^2}{z^2} + \frac{(- y)^2}{z^2} + 1 \right\} - R^2 = 0$$

De donde resulta, luego de simplificar z^2:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Con lo que queda demostrado.

6.7 - Solución de Ecuaciones de Derivadas Parciales.

En este apartado trataremos de resolver el problema de encontrar la solución de algunas ecuaciones de derivadas parciales, simples, que se pueden resolver en forma directa. En tanto, en el siguiente analizaremos métodos generales para hallar la solución. Finalmente, los últimos apartados de la presente Parte VI están dedicados a exponer la solución de algunas ecuaciones de derivadas parciales especialmente interesantes por sus aplicaciones en el campo de la ingeniería.

Ejemplo 1: En este contexto, empezaremos por analizar la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y} = A x^2 y$$

Integrando $\quad z = A \int x^2 y \; dy$

Y como $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 y^2) = 2x^2 y$

podemos poner:

$$z = \frac{A}{2} \int \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^2)\, dy = \frac{A}{2} x^2 y^2 + A\,\phi(x)$$

Puesto que estamos integrando respecto de y, aparece como constante de integración una función de x exclusivamente, que es la que denominamos $\phi(x)$.

Verificaremos a continuación que la ecuación hallada es la solución. En efecto:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{2} x^2 y^2 + A\,\phi(x)\right) = 2\,\frac{A}{2} x^2 y + 0 = A x^2 y$$

Ejemplo 2: En este ejemplo procederemos a analizar una ecuación diferencial de segundo orden, como la siguiente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + C y = 0$$

Integrando dos veces, aparecerá cada vez una función que no depende de x, es decir:

$$z = -\iint C\,.\,y\; dx\; dx + \int \phi_1(y)\, dx + \phi_2(y) =$$

$$= -C y \int \left(\int dx\right) dx + \phi_1(y) \int dx + \phi_2(y)$$

Por lo tanto, calculando las integrales que contiene esta última expresión, obtendremos la solución buscada:

$$z = -C\,.\,y \int x\; dx + x\,\phi_1(y) + \phi_2(y)$$

y, por fin:

$$z = -\frac{C}{2} x^2 y + x\,\phi_1(y) + \phi_2(y)$$

Comprobaremos seguidamente que ésta es la solución. Efectivamente, derivando la función z hallada, dos veces con respecto a x, obtenemos, sucesivamente:

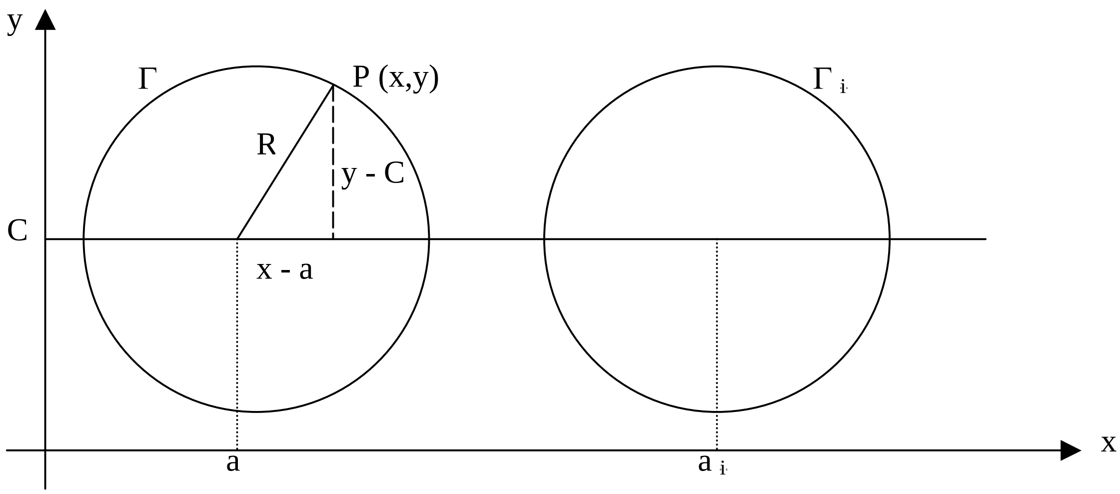
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{C}{2} x^2 y + x\,\phi_1(y) + \phi_2(y)\right) = -C\,x\,y + \phi_1(y)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{C}{2} x^2 y + x\,\phi_1(y) + \phi_2(y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-C\,x\,y + \phi_1(y)\right) = -C y$$

con lo que queda demostrado. En todos los casos, las funciones ϕ se determinan a partir de las condiciones de contorno.

Ejemplo 3: Consideraremos la familia de circunferencias de igual radio R, en el plano, con centro en los diferentes puntos de la recta definida por

$$y = C, \text{ constante.}$$



Cada miembro de la familia estará caracterizado por el valor de un parámetro a, en tanto que R y C son constantes que identifican a la familia. La ecuación genérica de la misma es:

$$(x - a)^2 + (y - C)^2 = R^2$$

Esta ecuación se puede escribir también así:

$$F = (x - a)^2 + (y - C)^2 - R^2 = 0 \qquad (6.23)$$

Y que, en forma sintética, se puede simbolizar como sigue:

$$F = (x, y, R, C, a) = 0$$

Ahora, derivaremos F respecto de x en la (6.23), obteniendo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - a) + 2(y - C)\frac{dy}{dx} = 2(x - a) + 2(y - C)\,y' = 0$$

De aquí, podemos despejar y':

$$y' = -\frac{(x - a)}{(y - C)}$$

Como hemos dicho más ariba, a cada circunferencia de la familia le corresponde un valor diferente de a, que la individualiza. Sea por ejemplo la circunferencia Γ_i, para la cual el respectivo parámetro será a_i. Entonces, la ecuación anterior se convierte en

$$y'(y - C) = -(x - a_i)$$

Veamos qué ocurre cuando $x = a_i$. En tal caso, como $x - a_i = 0$, aparecen dos posibilidades para la variable y:

$$y = C$$

o bien $$y' = 0$$

En el primer caso, la ecuación corresponde a la recta horizontal C, lugar geométrico de los centros de las circunferencias de la familia. Por su parte, cuando y' = 0, la ecuación (6.19) queda simplificada así:

$$F = (y - C)^2 - R^2 = 0$$

Despejando, se obtiene:

$$(y - C)^2 = R^2 \quad \therefore \quad y - C = \pm R$$

De donde surgen dos valores posibles para la variable y:

$$y_1 = R + C \qquad ó \qquad y_2 = -R + C \tag{6.24}$$

Derivando y respecto de x, comprobamos nuevamente que:

$$y' = 0$$

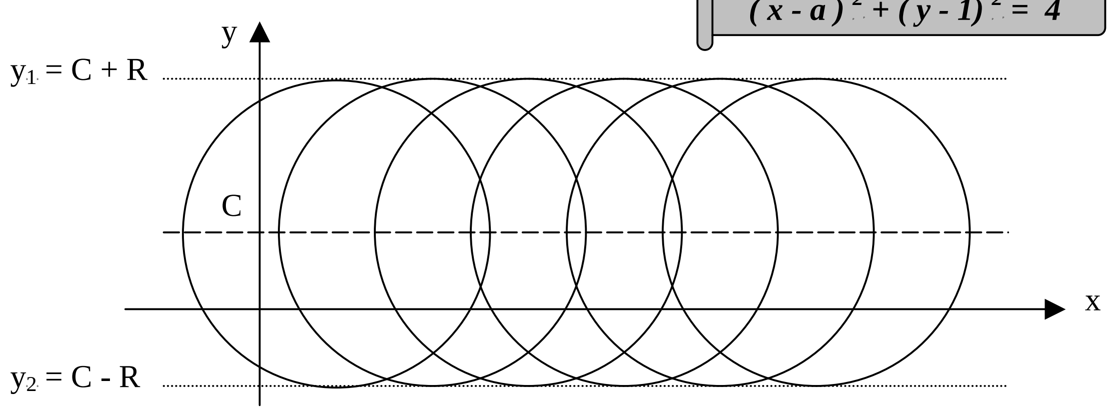
Esta es la ecuación de una recta horizontal, y ocurre justamente cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

- Que la tangente a la circunferencia es horizontal, y a su vez,
- Que x es igual a a_i.

Efectivamente, las ecuaciones (6.24) corresponden precisamente a las envolventes superior e inferior de esta familia de circunferencias. A su vez, el parámetro a_i que identifica a cada circunferencia dentro de la familia, coincide con el valor de la abscisa de su centro. Esto se puede entender mejor observando la figura de más abajo, que representa algunas circunferencias de la familia, y en la que hemos supuesto, para fijar ideas, que

$$R = 2 \qquad y \qquad C = 1$$

Ecuación de la Familia
$(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$



Resumiendo, las ecuaciones (6.24) de las envolventes son solución de la ecuación diferencial paramétrica (6.23), de la familia.

6.8 - Solución General y Solución Completa o Integral.

Sea una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden:

$$F(x,\ y,\ z,\ z'_x,\ z'_y) = 0 \tag{6.25}$$

Ya vimos que desde el punto de vista de la geometría, esta ecuación representa una familia de superficies en el espacio.

Una solución conteniendo dos funciones arbitrarias es la *Solución Completa* o *Integral*. Opuestamente, una solución que contiene únicamente una función arbitraria, se conoce como *Solución General*.

En los ejemplos dados hasta aquí hemos encontrado la solución a algunas ecuaciones diferenciales de derivadas parciales, sencillas, utilizando distintos métodos que si bien nos permitieron satisfacer nuestro propósito, pueden no resultar adecuados para resolver otras ecuaciones diferentes. En este apartado, vamos a estudiar diversas formas de aplicación que nos permitan llegar en forma sistemática a la solución completa:

Primera forma:

Como ya hicimos en la Sección 6.2, ecuación (6.5), llamaremos por simplicidad

$$z'_x = u$$

y $$z'_y = v$$

Con esta convención, la ecuación diferencial queda formulada así:

$$F(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0 \tag{6.26}$$

Despejemos ahora la variable v como una función de las demás:

$$v = v(x,\ y,\ z,\ u)$$

Supongamos que la función

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ a) = 0$$

es una solución de la ecuación diferencial (6.25). En tal caso, se trata de una solución general pues contiene un único parámetro, a.

Por el contrario, una solución de la forma:

$$F(x,\ y,\ z,\ a,\ b) = 0 \tag{6.27}$$

en la que b es una función del parámetro a,

$$b = \varphi(a)$$

o sea: $$F[x,\ y,\ z,\ a,\ \varphi(a)] = 0, \tag{6.28}$$

es una solución completa, puesto que contiene dos funciones, a y b.

Si derivamos respecto del parámetro a, hallamos:

$$\frac{\partial}{\partial a} F[x, y, z, a, \varphi(a)] = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\varphi'(a) = 0$$

Por lo tanto:

$$\therefore \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{\partial F}{\partial b}\varphi'(a) \qquad (6.29)$$

El valor del parámetro "a" se obtiene por eliminación entre las ecuaciones (6.28) y (6.29).

Segunda forma:

Partamos de la ecuación (6.26):

$$F(x, y, z, u, v) = 0 \qquad (6.30)$$

Supóngase que por algún procedimiento particular hemos hallado una solución que contiene una función arbitraria, a la que llamaremos "a". En esta situación, es posible escribir expresiones como las siguientes:

$$\Phi(x, y, z, u, v) = a$$

$$u = u(x, y, z, a)$$

y $\qquad v = v(x, y, z, a)$

En efecto, para obtener la primera de ellas, simplemente hemos expresado "a" en función de las demás variables, de forma idéntica a lo que hicimos al despejar v, a partir de la (6.27) en el ejemplo anterior. En cuanto a las otras dos, las obtenemos a partir de la ecuación

$$\Phi(x, y, z, u, v) - a = 0$$

despejando en ella respectivamente u y v. Notemos que si bien es evidente que, al despejar u, en el paréntesis del segundo término debería aparecer también la variable v, en la primera de ellas, o a la inversa en la última, no obstante, como v y u son respectivamente funciones de y o de x, ya están implícitamente aludidas al incluir en el paréntesis estas dos últimas variables. En otras palabras, podemos explicar esto de la forma siguiente:

$$u = u(x, y, z, v, a)$$

Pero

$$v = v(y)$$

Por tanto

$$u = u[x, y, z, v(y), a] = u(x, y, z, a)$$

Es obvio que si elegimos expresar estas ecuaciones en esta forma, es únicamente por razón de conveniencia.

Prosiguiendo con nuestro propósito, como z es función de x e y, su diferencial total responde a la fórmula:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = u \cdot dx + v \cdot dy \qquad (6.31)$$

Si en esta última ecuación procedemos a reemplazar u y v, obtenemos

$$dz = u(x, y, z, a)\, dx + v(x, y, z, a)\, dy$$

Si integramos ahora, aparecerá una segunda función constante. Por lo tanto, la integral que resulta es una solución completa de la ecuación diferencial.

Tercer método de solución:

La tercera forma de llegar a la solución completa de una ecuación diferencial en derivadas parciales que encaramos ahora se basa, como veremos a continuación, en la utilización adecuada de un conjunto de igualdades simples, reunidas bajo la forma de una única ecuación, que se conoce como *subsidiaria*. A partir de ésta es posible llegar a la determinación de los dos parámetros que conforman la solución completa.

Tomemos la ecuación (6.30)

$$F(x, y, z, u, v) = 0 \qquad (6.32)$$

y derivémosla respecto de u,

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = 0 \qquad (6.33)$$

También, a partir de

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{\partial u}{\partial v}$$

Si reemplazamos en la (6.33)

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dx}{dy} = 0$$

Ecuación que también podemos escribir así:

$$F'_u - F'_v \frac{dx}{dy} = 0$$

de donde:

$$\frac{d\,x}{F'_u} = \frac{d\,y}{F'_v}$$

Por simplicidad, utilizaremos un mismo nombre común, dt, para designar a estas dos razones, idénticas entre sí. Es decir, llamaremos

$$\frac{d\,x}{F'_u} = \frac{d\,y}{F'_v} = d\,t \tag{6.34}$$

A partir de aquí podemos hacer formalmente:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,x}{d\,t} = F'_u \\[2ex] \dfrac{d\,y}{d\,t} = F'_v \end{cases} \tag{6.35}$$

Detengámonos un momento para analizar lo realizado hasta ahora. De hecho, hemos expresado, siempre de modo formal, las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial v}$$

como derivadas totales respecto de un mismo parámetro auxiliar, que hemos denominado t.

Volvamos atrás a la ecuación (6.31), y dividamos sus dos miembros por dt. A continuación, en el resultado obtenido, reemplazaremos las (6.35), alcanzando una nueva igualdad:

$$\frac{d\,z}{d\,t} = u\,\frac{d\,x}{d\,t} + v\,\frac{d\,y}{d\,t} = u\,F'_u + v\,F'_v$$

Asimismo, partiendo de la ecuación (6.26), $F(x, y, z, z'_x, z'_y) = F(x, y, z, u, v) = 0$

y calculando sus derivadas con respecto a las variables x e y, hallamos las igualdades:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.36}$$

Por otra parte, las diferenciales totales de u y v son:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

y

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

Si las dividimos por dt,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

y
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Reemplazamos aquí (6.35), y llegamos a:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} F'_u + \frac{\partial u}{\partial y} F'_v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v}$$

y (6.37)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} F'_u + \frac{\partial v}{\partial y} F'_v = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v}$$

Como $u = \dfrac{\partial z}{\partial x}$

$\therefore$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$

Igualmente $v = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

$\therefore$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$

comparando ambas expresiones, por carácter transitivo hallamos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si reemplazamos estos valores en la primera de las ecuaciones (6.37) tendremos:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v}$$

Comparemos ahora con la primera de las (6.36):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Vemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{du}{dt} = 0$$

A continuación, despejemos la derivada total de u respecto de t:

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + u\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

De modo similar, llegaríamos al sistema:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + v\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Resumamos a continuación todas las relaciones encontradas hasta aquí:

$$\frac{dz}{dt} = u\,F'_u + v\,F'_v \qquad \therefore \qquad dt = \frac{dz}{u\,F'_u + v\,F'_v}$$

$$\frac{du}{dt} = -(F'_x + u\,F'_z) \qquad \therefore \qquad dt = -\frac{du}{F'_x + u\,F'_z}$$

$$\frac{dv}{dt} = -(F'_y + v\,F'_z) \qquad \therefore \qquad dt = -\frac{dv}{F'_y + v\,F'_z}$$

También:

$$dt = \frac{dx}{F'_u} = \frac{dy}{F'_v}$$

El conjunto de estas ecuaciones se resume, como dijimos, en la ***Ecuación Subsidiaria***,

$$\boxed{\frac{dx}{F'_u} = \frac{dy}{F'_v} = \frac{dz}{u\,F'_u + v\,F'_v} = -\frac{du}{F'_x + u\,F'_z} = -\frac{dv}{F'_y + v\,F'_z}}$$

que posibilita llegar a determinar la solución completa de una ecuación diferencial en derivadas parciales. En los ejemplos que siguen veremos cómo utilizarla para dicho fin:

Ejemplo 1: Sea resolver la ecuación

$$z = 3u^2 + v\,y$$

Para empezar, necesitamos "armar" la función F. Aquí, la misma es:

$$F = 3u^2 + v\,y - z = 0$$

De aquí: $F'_u = 6u \qquad F'_v = y \qquad F'_y = v \qquad$ y $\qquad F'_z = -1$

$\therefore \qquad u\,F'_u + v\,F'_v = 6u^2 + v\,y$

También $\qquad F'_y + v\,F'_z = v - v = 0$

Reemplacemos estos valores en la ecuación subsidiaria:

$$\frac{d\,x}{6\,u} = \frac{d\,y}{y} = \frac{d\,z}{6\,u^2 + v\,y} = \frac{d\,u}{u} = \frac{d\,v}{0}$$

Esta ecuación sólo es posible si dv es igual a cero, lo que implica que v es una constante:

$$d\,v = 0 \qquad \therefore \qquad v = \text{cte.} = C_1$$

Por tanto

$$z = 3\,u^2 + C_1\,y$$

o bien:

$$z - C_1\,y = 3\,u^2$$

$$\therefore \qquad d\,(\,z - C_1\,y\,) = 6\,u\,du$$

La ecuación subsidiaria viene nuevamente en nuestra ayuda, permitiéndonos escribir:

$$d\,x = \frac{6\,u\;du}{u} = 6\,du$$

Al integrar en ambos miembros hallamos:

$$\int d\,x = 6\int du$$

$$\therefore \qquad x = 6\,u + C_2$$

Por tanto

$$3\,u^2 = z - C_1\,y = \frac{(\,x - C_2\,)^2}{12}$$

De donde

$$z = \frac{(\,x - C_2\,)^2}{12} + C_1\,y$$

Esta es la solución completa de la ecuación diferencial, porque contiene dos funciones arbitrarias, C_1 y C_2.

Para encontrar la solución general, basta expresar una de ellas como función explícita de la otra. Pongamos, por ejemplo:

$$C_1 = C \qquad y \qquad C_2 = \varphi\,(\,C\,)$$

$$z = \frac{(\,x + \varphi\,(\,C\,))^2}{12} + C\,y = \frac{x^2 + 2\,x\,\varphi\,(\,C\,) + \varphi^2\,(\,C\,)}{12} + C\,y$$

Verifiquemos este resultado en la ecuación diferencial:

$$z = 3\,u^2 + v\,y = 3\,u^2 + C\,y$$

Para ello, debemos calcular previamente u y v:

$$u = \frac{\partial\,z}{\partial\,x} = \frac{x + \varphi\,(\,C\,)}{6}$$

y $\qquad v = \dfrac{\partial z}{\partial y} = C$

Reemplazando en la ecuación hallamos, efectivamente, que:

$$z = 3u^2 + C y = \frac{(x + \varphi(C))^2}{12} + C y$$

Ejemplo 2:

Sea la ecuación:

$$z = (2 - u)x + v y = 2x - x z'_x + y z'_y$$

De aquí, igualando a cero, obtenemos:

$$F = 2x - x z'_x + y z'_y - z = 0$$

$\therefore \qquad F'_u = -x \qquad y \qquad F'_v = y$

Comenzamos por plantear la ecuación subsidiaria

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y}$$

e integramos:

$$\int \frac{dx}{-x} = \int \frac{dy}{y}$$

El resultado de las integrales indicadas nos conduce a la ecuación:

$$\ln y + \ln x + k = 0$$

Hagamos $\qquad k = -\ln C_1$, y entonces:

$$\ln y + \ln x = \ln C_1$$

y, por la propiedad del logaritmo de un producto, será

$$\ln yx = \ln C_1$$

o bien $\qquad y x = C_1$

A partir de la ecuación original, teniendo en cuenta los valores de F'_u y F'_v, podemos hacer:

$$u \cdot F'_u + v \cdot F'_v = -ux + vy = vy - ux = z - 2x \qquad (6.38)$$

Yendo de nuevo a la ecuación subsidiaria,

$$\frac{dz}{u \cdot F'_u + v \cdot F'_v} = \frac{dz}{vy - ux} = -\frac{dx}{F'_u} = -\frac{dx}{x}$$

y despejando $vy - ux$, podemos ver que:

$$v\,y - u\,x = z - 2\,x = -\,x\,\frac{dz}{dx}$$

Operando en los dos últimos términos de esta igualdad, hallamos:

$$2\,x\;dx = z\;dx + x\;dz = d\,(x\,z)$$

Integrando nuevamente podemos hacer:

$$\int d\,(z\,x) = 2\int x\;dx + C_2$$

De donde:

$$z\,x = x^2 + C_2 \qquad \text{ó} \qquad C_2 = z\,x - x^2$$

Al resumir lo hecho hasta aquí encontramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x\,y = a \\ z\,x = x^2 + C_2 \end{cases}$$

Para obtener la solución general, expresaremos C_2 como función de C_1, es decir:

$$C_2 = \varphi\,(C_1)$$

y por tanto, la solución buscada es:

$$z = x + \frac{C_2}{x} = x + \frac{1}{x}\,\varphi\,(C_1)$$

Donde $\varphi\,(C_1)$ es una función arbitraria de x e y. Por ejemplo, si $\varphi\,(C_1) = e^{xy}$, entonces:

$$z = x + \frac{e^{xy}}{x} \qquad u = z'_x = 1 + \frac{x\,y\,e^{xy} - e^{xy}}{x^2} \qquad v = z'_y = \frac{x\;e^{xy}}{x} = e^{xy}$$

Reemplazando en la ecuación implícita, verificamos que es solución de la misma. En efecto:

$$F = 2\,x - x\,z'_x + y\,z'_y - z = 2\,x - x - y\,e^{xy} + \frac{e^{xy}}{x} + y\,e^{xy} - x - \frac{e^{xy}}{x} = 0$$

Ejemplo 3: Veamos finalmente la ecuación:

$$z = u\,x + v\,y - 5\,x + 2\,y \qquad \therefore \qquad F = u\,x + v\,y - 5\,x + 2\,y - z = 0$$

Aquí tenemos:

$$F'_x = u - 5, \qquad F'_y = v + 2, \qquad F'_z = -1, \qquad F'_u = x, \qquad y \qquad F'_v = y$$

y la ecuación subsidiaria es:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x\,u + v\,y} = \frac{-\,du}{u - 5 - u} = \frac{-\,dv}{v + 2 - v}$$

A partir de aquí podemos obtener las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,u}{5} \qquad \therefore \quad d\,u = 5\,\frac{d\,x}{x}$$

Integrando en ambos miembros,

$$u = 5\,(\ln x + C_1)$$

Lo mismo, $$\frac{d\,y}{y} = -\frac{d\,v}{2} \qquad \therefore \quad d\,v = -2\,\frac{d\,y}{y}$$

$$v = -2\,(\ln y + C_2)$$

La solución de la ecuación es, por tanto:

$$z = 5\,x\,(\ln x + C_1) - 2\,y\,(\ln y + C_2) - 5\,x + 2\,y$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Verificación:

$$u = \frac{d\,z}{d\,x} = 5\,(\ln x + C_1) + 5 - 5 = 5\,(\ln x + C_1)$$

y $$v = \frac{d\,z}{d\,y} = -2\,(\ln y + C_2) - 2 + 2 = -2\,(\ln y + C_2)$$

6.9 - Ecuación de la cuerda vibrante:

Encararemos seguidamente la solución de ciertas ecuaciones de derivadas parciales, útiles para resolver diversos problemas de ingeniería. Nos detendremos en particular, aunque no exclusivamente, en aquellas ecuaciones que interesan al campo de la ingeniería eléctrica y electrónica, tales como las ecuaciones de las ondas, entre otras.

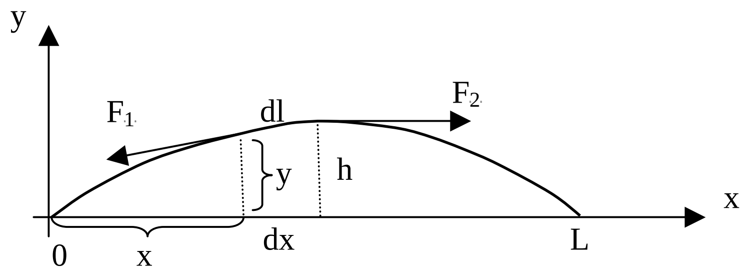
En primer lugar vamos a plantear una ecuación diferencial que represente el desplazamiento en sentido transversal, a lo largo del tiempo, de una cuerda de longitud L, sujeta por sus extremos, que es sacada de su posición de reposo y vuelta a dejar en libertad en forma instantánea.

Para fijar ideas, digamos que se entiende por cuerda vibrante a las cuerdas de los instrumentos musicales. Pensemos por ejemplo en una cuerda de guitarra, que al ser pulsada, experimenta una vibración que, amplificada por la caja de resonancia del instrumento, se transmite al aire circundante produciendo una "nota", en el sentido musical de esta palabra.

Concentrémonos por un momento en las características del movimiento de la cuerda, que inicialmente, en estado de reposo, está tensada por sus extremos. Al ser pulsada y soltada a continuación experimenta un desplazamiento transversal apenas perceptible, se desplaza en sentido opuesto hasta alcanzar un desplazamiento ligeramente menor que el que se le imprimió al pulsarla, y continúa así hasta regresar al estado de reposo original.

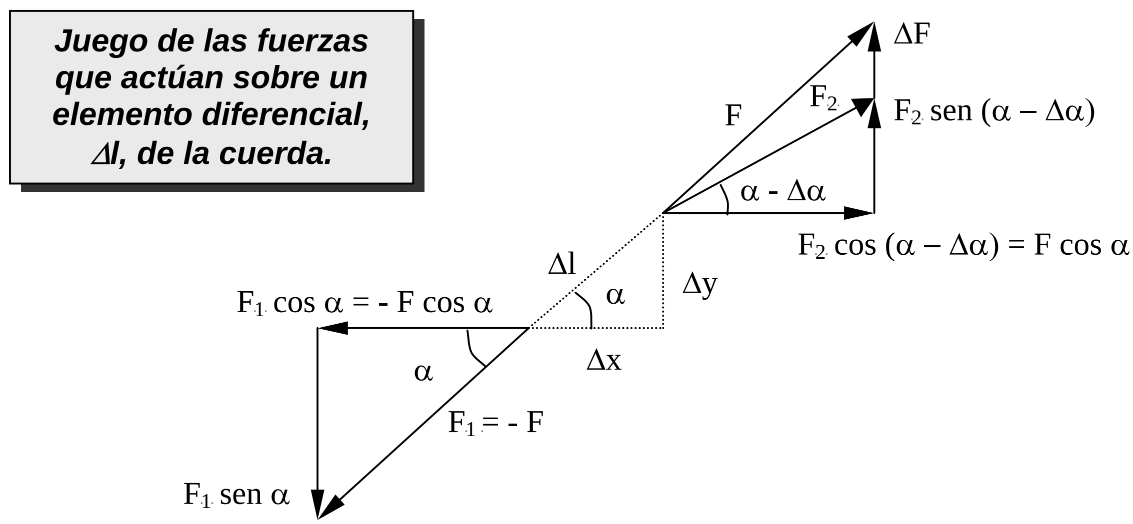
El movimiento de la cuerda en tales condiciones constituye un caso típico de fenómeno ondulatorio amortiguado.

La figura siguiente nos facilitará definir las condiciones del problema. Pero debe quedar bien en claro que, aunque por necesidades del dibujo no lo parezca, el desplazamiento de la cuerda en sentido transversal, es decir, su apartamiento de la horizontal, es de un orden varias veces inferior a la longitud de la cuerda. En otras palabras, h es un infinitésimo frente a L.



Consideremos un elemento dl de la cuerda separada de su posición de equilibrio. En tal condición, las tensiones F_1 y F_2 en ambos extremos del elemento no están alineadas entre sí; por tanto, no son iguales y opuestas.

Por el contrario, como al menos en teoría no existe ningún movimiento en sentido horizontal, las proyecciones de ambas fuerzas sobre el eje horizontal deben ser iguales entre sí. La figura siguiente muestra el juego de las fuerzas actuantes sobre la cuerda pulsada:



Nuevamente aquí las limitaciones de dibujo distorsionan la realidad. Para una mejor comprensión de lo que sigue, téngase en cuenta que el ángulo α es muy pequeño, y por lo tanto, el ángulo $\Delta\alpha$ entre las fuerzas F_1 y F_2 es prácticamente un elemento diferencial.

Como queda dicho más arriba, las fuerzas que actúan en sentido longitudinal satisfacen la ecuación:

$$F_1 \cos\alpha \; + \; F_2 \cos\alpha \; = \; 0$$

Pasemos ahora a estudiar el juego de las fuerzas verticales:

- La proyección vertical de la fuerza F_1 que actúa en el extremo izquierdo del elemento diferencial de la cuerda es:

$$- F \ \text{sen}\ \alpha$$

- Y la que lleva la cuerda hacia arriba, en el otro extremo es:

$$F \ \text{sen}\ \alpha = F_2 \ \text{sen}\ (\alpha - \Delta\alpha) + \Delta F$$

Despejando ΔF y efectuando operaciones, llegamos a la ecuación:

$$\Delta F = F \ \text{sen}\ \alpha - F_2 \ \text{sen}\ \alpha \ \cos \Delta\alpha + F_2 \cos\alpha \ \text{sen}\ \Delta\alpha$$

Dado que el incremento $\Delta\alpha$ es suficientemente pequeño, podemos aproximar:

$$\cos \Delta\alpha \sim 1 \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\ \Delta\alpha \sim \Delta\alpha$$

Reemplazando arriba, se alcanza la igualdad:

$$\Delta F \sim F \ \text{sen}\ \alpha - F_2 \ \text{sen}\ \alpha + F_2 \ \Delta\alpha \ \cos\alpha$$

Si dividimos ambos miembros por Δl:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} \sim \frac{1}{\Delta l} \left(F \ \text{sen}\ \alpha - F_2 \ \text{sen}\ \alpha + F_2 \ \Delta\alpha \ \cos\alpha \right)$$

Si en lugar del incremento Δl consideramos un elemento diferencial de longitud dl, el ángulo $\Delta\alpha$ tiende asimismo a un diferencial de ángulo, $d\alpha$, mientras que la fuerza F_2 tenderá al valor de la fuerza aplicada, F, que suponemos constante. Teniendo en cuenta esto, el cociente incremental de la fuerza por unidad de longitud de la cuerda será:

$$\frac{d F}{d l} \sim \frac{1}{\partial l} \left(F \ \text{sen}\ \alpha - F \ \text{sen}\ \alpha + F \ \partial\alpha \ \cos\alpha \right)$$

O, simplificando:

$$\frac{d F}{d l} \sim \frac{\partial \alpha}{\partial l} \ F \cos\alpha \tag{6.39}$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\frac{\partial \ \text{sen}\ \alpha}{\partial l} = \cos\alpha \ \frac{\partial\alpha}{\partial l}$$

Reemplazando en la (6.9), nos queda:

$$\frac{d F}{d l} \sim F \ \frac{\partial \ \text{sen}\ \alpha}{\partial l}$$

En la figura puede verse también que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\partial y}{\partial l}$$

Reemplazando nuevamente:

$$\frac{dF}{dl} \sim F \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right) = F \frac{\partial^2 y}{\partial l^2}$$

Como hemos dicho que la separación de la cuerda respecto de la horizontal es muy pequeña, podemos afirmar que

$$\partial l \sim \partial x$$

y por tanto $\dfrac{dF}{dl} \sim F \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Pasemos finalmente dl al segundo miembro, con lo cual obtenemos:

$$dF \sim F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dl \tag{6.40}$$

Al llegar aquí, recordemos la ley de la dinámica: Fuerza igual a masa por aceleración; en símbolos

$$F = m \, . \, a$$

Llamando μ a la masa de la cuerda por unidad de longitud, la masa dm de un elemento de aquella, de longitud dl, será:

$$dm = \mu \, . \, dl$$

y la aceleración que adquiere dicho elemento bajo la acción de la proyección vertical de la fuerza diferencial, es a su vez:

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

La fuerza diferencial está dada entonces por el producto:

$$dF = a \, . \, dm = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dl \tag{6.41}$$

Por tanto, y por carácter transitivo, las ecuaciones (6.40) y (6.41) conducen a a la deducción siguiente:

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Si definimos

$$\frac{\mu}{F} = c^2$$

obtenemos la

Ecuación diferencial de la Cuerda Vibrante:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

que, como puede verse, es una ecuación entre derivadas parciales, en la que la variable dependiente, "y", es a su vez función de otras dos: "x" y "t".

Esta ecuación es idéntica, salvo por el valor de la constante c, a la

Ecuación de las ondas (Ecuación de D'Alembert):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}$$

que define analíticamente el ***movimiento ondulatorio***.

6.10 - Solución de la Ecuación de la Cuerda Vibrante: Método de Separación de Variables.

La solución de la ecuación consiste en encontrar el valor de $y = f(x, t)$, dadas ciertas

- Condiciones iniciales, y
- Condiciones de contorno.

Supongamos que la posición de la cuerda en reposo coincide con el eje de abscisas x, estando sus extremos fijos en los puntos 0 y L, condición ésta última que se mantiene a través del tiempo. En tal supuesto, las condiciones de contorno son:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0$$

Como condición adicional supondremos que la cuerda parte del estado de reposo, o lo que es lo mismo, que su velocidad inicial es nula:

$$\left.\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0$$

Finalmente, necesitamos establecer la posición inicial de la cuerda, a la que llamaremos $f(x)$. Aceptaremos que la misma está definida por la ecuación:

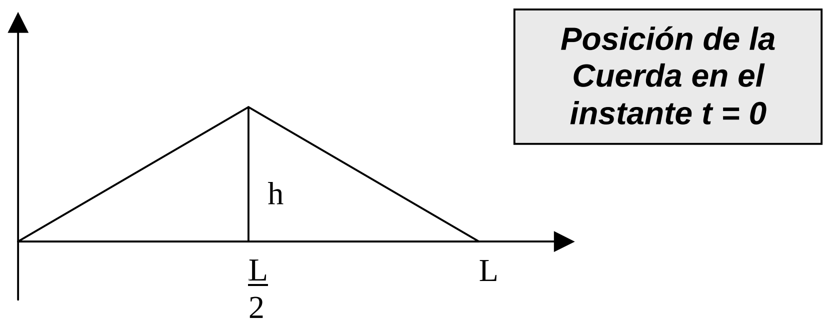
$$y(x, 0) = f(x)$$

D'Alembert ha propuesto diversos métodos para resolver la ecuación de la cuerda vibrante, y de la ecuación de las ondas en general. En este apartado veremos el llamado

Método de Separación de Variables [1]*:*

Empecemos por suponer que la posición inicial de la cuerda describe un triángulo isósceles, es decir que sujetamos la cuerda exactamente por su punto medio, y la mantenemos así hasta el momento de dejarla en libertad.

La figura siguiente ilustra la *posición inicial* descrita más arriba.



A continuación, descompondremos la función y (x, t) en un producto de otras dos, una de las cuales depende únicamente de x y la otra exclusivamente de t:

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Consecuentemente, la ecuación de la cuerda vibrante puede ser reformulada así:

$$X'' \cdot T = c^2 \; X \cdot T''$$

Que se puede escribir también como:

$$\frac{T''}{T} = \frac{1}{c^2} \frac{X''}{X}$$

Si llamamos:

$$\frac{X''}{X} = - \lambda^2$$

de donde

$$X'' = - \lambda^2 \; X$$

y

$$T'' = - \frac{\lambda^2}{c^2} \; T$$

podremos resumir todo esto en el sistema siguiente:

(1) Este método es conocido también como *Método del Producto*, e incluso *Método de Fourier*, por razones que se comprenderán al estudiarlo. Con variantes, el procedimiento es valido también para otras posiciones iniciales diferentes de la que consideramos aquí.

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T'' + \dfrac{\lambda^2}{c^2} T = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución es un producto de senos y cosenos, de alguno de los tipos siguientes:

$$y = \operatorname{sen} \lambda x \,.\, \cos \frac{\lambda}{c} t$$

$$y = \operatorname{sen} \lambda x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\lambda}{c} t$$

$$y = \cos \lambda x \,.\, \cos \frac{\lambda}{c} t$$

$$y = \cos \lambda x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\lambda}{c} t$$

A partir de las condiciones de contorno dadas, se deduce que únicamente la primera de estas cuatro igualdades,

$$y = \operatorname{sen} \lambda x \,.\, \cos \frac{\lambda}{c} t \tag{6.42}$$

satisface el sistema. En efecto, solamente esta función cumple con la condición:

$y\,(0, t) = 0,$ para cualquier t,

así como la de velocidad inicial nula:

$$\frac{\partial}{\partial t} y\,(x, 0) = 0$$

La primera condición se cumple puesto que para $x = 0$ es $\operatorname{sen} x = 0$, condición que descarta las dos últimas soluciones de la lista. En cuanto a la segunda condición, derivando "y" respecto de "t" obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{sen} \lambda x \,.\, \cos \frac{\lambda}{c} t \right) = -\frac{\lambda}{c} \operatorname{sen} \lambda x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\lambda}{c} t$$

ecuación que es igual a cero para $t = 0$:

$$-\frac{\lambda}{c} \operatorname{sen} \lambda x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\lambda}{c} t \,\Big|_{t=0} = -\frac{\lambda}{c} \operatorname{sen} \lambda x \,.\, \operatorname{sen} 0 = 0$$

Pero, para que y (x, t) sea la solución buscada, la (6.42) debe satisfacer además la condición inicial:

$$y(L, 0) = 0$$

Para ello es necesario que λ L sea múltiplo de π:

$$\lambda x \Big|_{x = L} = \lambda L = n\pi$$

de donde resulta para λ el valor:

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

Al reemplazar este valor, la (6.42) nos dice que

$$y(x, t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi t}{cL} \qquad (6.43)$$

Si relacionamos esta igualdad con la máxima elongación inicial de la cuerda, a cuyo valor hemos llamado h (Ver la figura), nos encontramos con una nueva condición a satisfacer, que es la siguiente:

$$y\left(\frac{L}{2}, 0\right) = h$$

Reemplazando en la (6.43), observamos que:

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi L}{2L} \cdot \cos 0 = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} = 1 & \text{si n es impar} \\ = 0 & \text{si n es par} \end{cases}$$

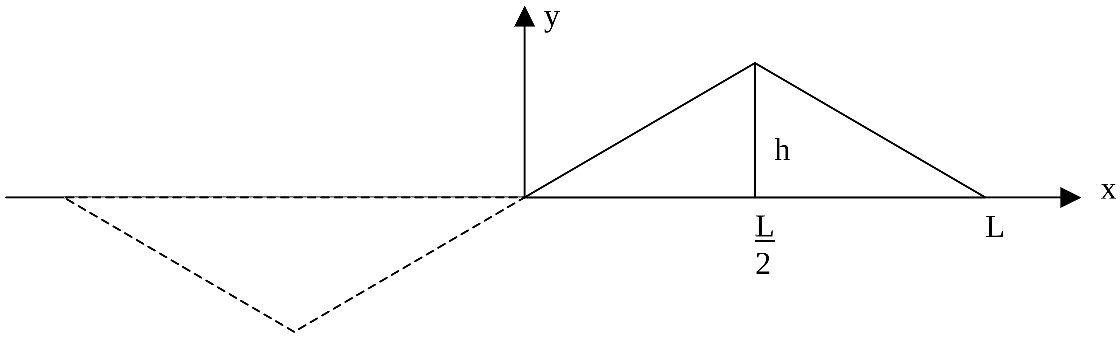
En realidad, necesitamos que este valor sea igual a h, lo que a primera vista parecería una incongruencia. Esto se resuelve multiplicando el valor de "y" por un factor, C_n. Como n es cualquier número natural, la solución acepta un desarrollo en serie:

$$y(x, t) = \sum_n C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi t}{cL} \qquad (6.44)$$

En el instante inicial, t = 0, la serie toma la forma simplificada:

$$y(x, 0) = \sum_n C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

Esta función y (x, 0) = f (x), que define la posición de la cuerda en el instante t = 0, coincide con un pulso triangular, que podemos desarrollar por tanto como serie de Fourier. Dicha serie, por tratarse de una función impar como muestra la figura siguiente, estará conformada por un desarrollo en senos:

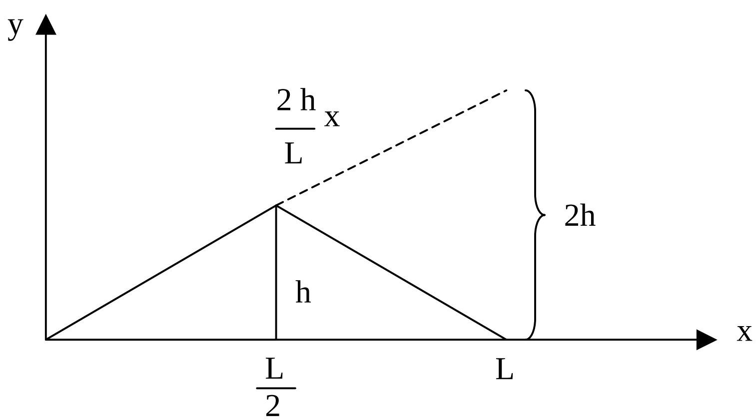


Es decir que los coeficientes C_n coinciden por lo tanto con los coeficientes b_n del desarrollo de Fourier:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_{1}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} \, dx \qquad (6.45)$$

Es de notar que el período de la función a desarrollar es igual a 2 L, como se puede ver en la misma figura.

Para calcular los coeficientes C_n, observemos que f (x) está constituida por dos tramos, diferentes entre sí:



Las ecuaciones que definen ambos tramos son, respectivamente (Ver figura):

Para

$$0 < x < \frac{L}{2} \qquad \text{es :} \qquad y = \frac{2h}{L} x$$

y para:

$$\frac{L}{2} < x < L \qquad \text{es :} \qquad y = 2h - \frac{2h}{L} x = \frac{2h}{L} (L - x)$$

Reemplazamos ahora estos valores en la (6.45), y obtenemos:

$$C_n = \frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} \frac{2h}{L}\, x \,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2h}{L}\,(L - x)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx\right\}$$

$$C_n = \frac{4h}{L^2}\left\{\int_0^{L/2} x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{L/2}^{L} (L - x)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx\right\} \qquad (6.46)$$

Para calcular por partes la primera de estas integrales

$$\int_0^{L/2} x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

haremos:

$$u = x \qquad y \qquad dv = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

De donde:

$$du = dx \qquad y \qquad v = -\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

Al integrar ahora, tenemos

$$\int_0^{L/2} x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx = -\frac{Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Bigg|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Y, efectuando operaciones,

$$\int_0^{L/2} x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx = -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Bigg|_0^{L/2}$$

Como sen 0 = 0, resulta, finalmente:

$$\int_0^{L/2} x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx = -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \qquad (6.47)$$

Procediendo de modo idéntico con la segunda integral de la (6.46):

$$\int_{L/2}^{L} (L - x)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

haremos

$$u = x - L \quad \text{y} \quad dv = \text{sen}\,\frac{n\,\pi\,x}{L}$$

Por tanto: $\quad du = dx \quad$ y $\quad v = -\dfrac{L}{n\,\pi}\cos\dfrac{n\,\pi\,x}{L}$

Integrando, hallamos:

$$\int_{L/2}^{L} (L - x)\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi\,x}{L}\,dx = -\int_{L/2}^{L} (x - L)\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi\,x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{L}{n\,\pi}(x - L)\cos\frac{n\,\pi\,x}{L}\Bigg|_{L/2}^{L} - \frac{L^2}{n^2\,\pi^2}\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi\,x}{L}\Bigg|_{L/2}^{L}$$

$$= \frac{L^2}{2\,n\,\pi}\cos\frac{n\,\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\,\pi^2}\left(\text{sen}\ n\,\pi - \text{sen}\,\frac{n\,\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{L^2}{2\,n\,\pi}\cos\frac{n\,\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\,\pi^2}\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi}{2} \tag{6.48}$$

En esta última ecuación hemos simplificado $\text{sen}\ n\,\pi = 0$. Reemplazando ahora las igualdades (6.47) y (6.48) en la (6.46), resulta

$$C_n = \frac{4\,h}{L^2}\,\frac{2\,L^2}{n^2\,\pi^2}\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi}{2} = \frac{8\,h}{n^2\,\pi^2}\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi}{2}$$

Recordando, (6.44), que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi\,x}{L}\ \cos\frac{n\,\pi\,t}{c\,L}$$

e introduciendo el valor de C_n recién hallado, resulta:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\,h}{n^2\,\pi^2}\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi}{2}\ \text{sen}\,\frac{n\,\pi\,x}{L}\ \cos\frac{n\,\pi\,t}{c\,L}$$

Y como $\quad \text{sen}\,\dfrac{n\,\pi}{2}$

es alternadamente igual a + 1 y - 1, llegamos finalmente a la solución de la ecuación de la cuerda vibrante, cuando la posición inicial es un triángulo isósceles:

$$y(x, t) = \frac{8\,h}{\pi^2}\left(\text{sen}\,\frac{\pi\,x}{L}\ \cos\frac{\pi\,t}{c\,L} - \frac{1}{9}\ \text{sen}\,\frac{3\,\pi\,x}{L}\ \cos\frac{3\,\pi\,t}{c\,L} + \dots\right)$$

6.11 - Cuerda Vibrante: Método de D'Alembert.

Para encarar la explicación de este método de cálculo, empezaremos por recordar la ecuación de la Cuerda Vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

la que, poniendo

$$\alpha = \frac{1}{c}$$

podemos modificar así:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{6.49}$$

Hagamos ahora el cambio de variables:

$$r = x + \alpha t$$

y $$s = x - \alpha t$$

De aquí:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha$$

Si derivamos y (x, t) respecto de t, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha \frac{\partial y}{\partial r} - \alpha \frac{\partial y}{\partial s} = \alpha \left(\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial s} \right)$$

Y, derivando de nuevo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s}\frac{\partial r}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha \left(\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} + \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \right) \tag{6.50}$$

De modo similar, al derivar y (x, t) respecto de x, obtendremos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial s}$$

Derivemos aquí también una vez más:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \frac{\partial r}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \right) \qquad (6.51)$$

Por fin, reemplacemos (6.50) y (6.51) en la (6.49). Hallamos:

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \right) = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} \right)$$

Esta igualdad sólo tiene sentido si:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} = 0$$

Nos encontramos por tanto con una nueva ecuación diferencial, cuya solución es de la forma:

$$y = \Phi(r) + \Psi(s)$$

En efecto,

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}$$

y, por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right) = 0$$

Al reemplazar en ella los valores asignados a las variables r y s, la solución queda reformulada así:

$$y(x, t) = \Phi(x + \alpha t) + \Psi(x - \alpha t) \qquad (6.52)$$

Esta es la solución propuesta por D'alembert.

Determinación de las funciones Φ y Ψ. Llamemos $A(x)$ a la función que define la "posición en el instante inicial":

$$y(x, 0) = A(x)$$

Y, $B(x)$, a la velocidad inicial

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = B(x)$$

De ambas ecuaciones se sigue que

$$A(x) = y(x, 0) = \Phi(x) + \Psi(x)$$

Por otro lado, derivando la (6.52) respecto de t tenemos:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \alpha\,\Phi'(x+\alpha t) - \alpha\,\Psi'(x-\alpha t)$$

Si $t = 0$, esta ecuación se ajusta exactamente a la definición de B (x). Por tanto:

$$B(x) = \alpha\,\Phi'(x) - \alpha\,\Psi'(x)$$

De otra parte, derivando A (x), función de x exclusivamente, obtenemos

$$A'(x) = \Phi'(x) + \Psi'(x)$$

A partir de estas dos últimas ecuaciones podemos hacer:

$$B(x) + \alpha\,A'(x) = 2\,\alpha\,\Phi'(x)$$

Y d dividiendo ambos miembros por $2\,\alpha$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2}\left(A'(x) + \frac{1}{\alpha}\,B(x)\right)$$

De manera similar, se obtiene:

$$\Psi'(x) = \frac{1}{2}\left(A'(x) - \frac{1}{\alpha}\,B(x)\right)$$

Si integramos $\Phi'(x)$ desde $t = 0$ hasta un instante t, recordando que Φ es función de $r = x + \alpha\,t$:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\alpha t}\left(A'(x) + \frac{1}{\alpha}\,B(x)\right)dx$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\alpha t}A'(x)\,dx + \frac{1}{2\,\alpha}\int_{x}^{x+\alpha t}B(x)\,dx$$

De forma idéntica:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x-\alpha t}A'(x)\,dx - \frac{1}{2\,\alpha}\int_{x}^{x-\alpha t}B(x)\,dx$$

Y como

$$y(x,t) = \Phi(x,t) + \Psi(x,t)$$

reemplazando y efectuando operaciones:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\alpha t}A'(x)\,dx + \frac{1}{2\,\alpha}\int_{x}^{x+\alpha t}B(x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x}^{x - \alpha t} A'(x)\, dx - \frac{1}{2\alpha} \int_{x}^{x - \alpha t} B(x)\, dx$$

$$\therefore \qquad y(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x}^{x + \alpha t} A'(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{x - \alpha t}^{x} A'(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} \int_{x}^{x + \alpha t} B(x)\, dx + \frac{1}{2\alpha} \int_{x - \alpha t}^{x} B(x)\, dx$$

Finalmente

$$y(x,t) = \frac{1}{2} \left[A(x + \alpha t) + A(x - \alpha t) \right] + \frac{1}{2\alpha} \int_{x - \alpha t}^{x + \alpha t} B(x)\, dx$$

Expresión en la que, como hemos dicho más arriba, A (x) es la ecuación de la cuerda en el instante anterior a ser dejada libre, y B (x) es la velocidad inicial de la misma.

6.12 - Ecuación de Laplace:

Dada una función de dos variables $\Phi(x, y)$, se conoce como Ecuación de Laplace a aquella cuya expresión simbólica es:

Ecuación de Laplace

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(x, y) = 0}$$

Donde el símbolo ∇ (nabla), aplicado a $\Phi(x, y)$, representa la función:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

x e y son variables independientes entre sí.

Notas: La Ecuación de Laplace puede formularse de manera idéntica para una función de tres variables. Aquí, por razones de simplicidad, estudiaremos la solución de la ecuación en el caso de dos variables únicamente. La solución de la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares se expone a través del problema 6.14.6 b, al final del Capítulo.

A continuación vamos a expresar la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\nabla^2 \Phi(\rho, \theta) = 0,$$

partiendo de las conocidas relaciones entre coordenadas,

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

y $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Al expresar Φ en función de las variables ρ y θ, surgen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{6.53}$$

e igualmente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{6.54}$$

Por otra parte, derivando a partir de

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho} \tag{6.55}$$

y $$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho} \tag{6.56}$$

Derivando nuevamente, para lo cual aplicaremos la fórmula de la derivada de un cociente, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho - x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho - x\frac{x}{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3} = \frac{y^2}{\rho^3} \tag{6.57}$$

Además, como

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

si derivamos también esta expresión respecto de x, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\cos^2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

Pero también es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{\rho^2\cos^2\theta}$$

Comparando las dos últimas igualdades, por carácter transitivo surge que

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2} \tag{6.58}$$

Si derivamos una vez más, tendremos:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2\,x\,y}{\rho^4} \tag{6.59}$$

De modo totalmente similar, al ser

$$\frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

derivando respecto de y, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\cos\theta - \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(-\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y} - \cos^2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Pero como también:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

nuevamente por carácter transitivo resulta

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} \tag{6.60}$$

Y, derivando otra vez:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{\rho^4} \qquad (6.61)$$

Ahora, reemplazando las igualdades (6.55) a (6.61), en las ecuaciones (6.53) y (6.54), resulta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{y^2}{\rho^3} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\frac{y^2}{\rho^4} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{2xy}{\rho^4}$$

y

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{x^2}{\rho^3} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\frac{x^2}{\rho^4} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{2xy}{\rho^4}$$

Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{x^2+y^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{x^2+y^2}{\rho^3}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{x^2+y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \nabla^2 \Phi$$

Es posible simplificar esta ecuación si tenemos en cuenta la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}$$

En efecto, reemplazando este resultado en la fórmula del Laplaciano obtenemos:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

Esta es la expresión del Laplaciano $\nabla^2 \Phi$, en coordenadas polares. Por lo tanto, obtenemos la Ecuación Diferencial de Laplace igualando a cero esta última expresión:

Ecuación de Laplace en coordenadas polares

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0} \qquad (6.62)$$

Para hallar la solución de esta ecuación emplearemos el método de la separación de variables. Es decir, consideraremos que $\Phi(\rho, \theta)$ es igual al producto de dos funciones de una variable:

$$\Phi(\rho, \theta) = R(\rho) \, . \, T(\theta)$$

De esta última igualdad se deducen, por derivación, las siguientes:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = T \frac{d R}{d \rho} \qquad (6.63)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = R \frac{d T}{d \theta}$$

y

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = R \frac{d^2 T}{d \theta^2}$$

Reemplazaremos a continuación estos valores en la ecuación de Laplace (6.62), con lo que ésta adopta la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho T \frac{d R}{d \rho} \right) + \frac{R}{\rho^2} \frac{d^2 T}{d \theta^2} = 0$$

Al efectuar la diferencial parcial indicada, resulta:

$$\frac{1}{\rho} T \frac{d R}{d \rho} + T \frac{d^2 R}{d \rho^2} + \frac{R}{\rho^2} \frac{d^2 T}{d \theta^2} = 0$$

De donde podemos despejar:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d \theta^2} = - \frac{\rho}{R} \frac{d R}{d \rho} - \frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d \rho^2}$$

A fin de simplificar la escritura, en adelante llamaremos

$$n^2 = - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d \theta^2} \qquad (6.64)$$

Con esta notación, queda:

$$n^2 = \frac{\rho}{R} \frac{d R}{d \rho} + \frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d \rho^2}$$

Al expresar estas dos últimas ecuaciones en forma implícita hallamos el sistema, homogéneo, siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 T}{d \theta^2} + T n^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2 R}{d \rho^2} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{d R}{d \rho} - \dfrac{n^2}{\rho^2} R = 0 \end{array} \right. \qquad (6.65)$$

La solución de la primera de dichas ecuaciones es de la forma:

$$T(\theta) = A_n \cos n \theta + B_n \operatorname{sen} n \theta$$

En efecto, $$\frac{d\,T}{d\,\theta} = n\,(\,-\,A_n \operatorname{sen} n\,\theta \;+\; B_n \cos n\,\theta\,)$$

y $$\frac{d^2\,T}{d\,\theta^2} = -\,n^2\,(\,A_n \cos n\,\theta \;+\; B_n \operatorname{sen} n\,\theta\,) \qquad (6.66)$$

Por su parte, la solución de la segunda es, como vamos a ver:

$$R\,(\,\rho\,) = C_n\,\rho^{\,n} + D_n\,\rho^{\,-n}$$

Efectivamente:

$$\frac{d\,R}{d\,\rho} = n\,.\,C_n\,\rho^{\,n-1} - n\;D_n\,\rho^{\,-n-1}$$

y $$\frac{d^2\,R}{d\,\rho^2} = n\,(\,n-1\,)\;C_n\,\rho^{\,n-2} - n\,(\,-n-1\,)\;D_n\,\rho^{\,-n-2}$$

Reemplazando en la (6.65):

$$\frac{d^2\,R}{d\,\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d\,R}{d\,\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\,R = 0 \qquad (6.65)$$

obtenemos:

$$(\,n^2 - n\,)\,C_n\,\rho^{\,n-2} + (\,n^2 + n\,)\,D_n\,\rho^{\,-n-2} + n\,C_n\,\rho^{\,n-2} - n\;D_n\,\rho^{\,-n-2}\; -$$

$$-\;n^2\,C_n\,\rho^{\,n-2} - n^2\;D_n\,\rho^{\,-n-2} =$$

$$= C_n\,\rho^{\,n-2}\,(\,n^2 - n + n - n^2\,) + D_n\,\rho^{\,-(n+2)}\,(\,n^2 + n - n - n^2\,) = 0$$

Esto confirma que

$$\Phi\,(\,\rho,\theta\,) = R\,(\,\rho\,)\,.\,T\,(\,\theta\,)$$

es solución de la ecuación diferencial de Laplace (6.62)

Otra forma de verificarlo consiste en reemplazar directamente esta última igualdad en la ecuación de Laplace

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,\theta^2} = 0 \qquad (6.62)$$

Si en ésta multiplicamos ambos miembros por $\rho^{\,2}$, podemos expresarla bajo una nueva forma:

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\rho}\right) + \frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,\theta^2} = 0 \qquad (6.67)$$

Reemplazando aquí el resultado obtenido en (6.63):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = T \frac{d R}{d \rho}$$

resulta:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(T \rho \frac{d R}{d \rho} \right) = T \frac{d R}{d \rho} + T \rho \frac{d^2 R}{d \rho^2}$$

También se vió, (6.66), que

$$\frac{d^2 T}{d \theta^2} = - n^2 (A_n \cos n \theta + B_n \operatorname{sen} n \theta) = - n^2 T$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = R \frac{d^2 T}{d \theta^2} = - n^2 R T$$

Reemplacemos estos valores en la (6.67). Obtendremos:

$$T \rho \frac{d R}{d \rho} + T \rho^2 \frac{d^2 R}{d \rho^2} - n^2 R T = 0$$

Simplificando T y reemplazando las derivadas de R por sus valores en función de ρ, llegamos a:

$$n C_n \rho^n - n D_n \rho^{-n} + n (n - 1) C_n \rho^n - n (- n - 1) D_n \rho^{-n} - n^2 R =$$

$$= (n + n^2 - n) C_n \rho^n + (- n + n^2 + n) D_n \rho^{-n} - n^2 (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) =$$

$$= n^2 C_n \rho^n + n^2 D_n \rho^{-n} - n^2 (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) = 0$$

Con lo que queda demostrado nuevamente que una función como

$$\Phi_n (\rho, \theta) = R_n (\rho) . T_n (\theta)$$

es efectivamente solución de la ecuación de Laplace. Lo es por supuesto cualquiera sea el valor de n, y por lo tanto también es solución cualquier suma de términos similares. En particular nos interesa la serie compuesta al tomar una secuencia de valores enteros para n, porque en este caso los sumandos constituyen funciones de frecuencias armónicas entre sí.

En función de los valores obtenidos para R y T, podemos hacer

$$R (\rho) = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}$$

y

$$T (\theta) = A_n \cos n \theta + B_n \operatorname{sen} n \theta$$

Si n = 0:

$$\Phi_0 (\rho, \theta) = R_0 (\rho) . T_0 (\theta) = (C_0 + D_0) A_0$$

Y, para cualquier otro valor de n:

$$\Phi_n (\rho, \theta) = R_n (\rho) . T_n (\theta) = (A_n \cos n \theta + B_n \operatorname{sen} n \theta) (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) =$$

$$= C_n (A_n \cos n \theta + B_n \operatorname{sen} n \theta) \rho^n + D_n (A_n \cos n \theta + B_n \operatorname{sen} n \theta) \rho^{-n}$$

La fórmula siguiente representa la expresión del desarrollo en serie de dicha solución:

$$\Phi_n (\rho, \theta) = \alpha_0 + \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \rho^{n} + \gamma_n \rho^{-n}) \cos n\theta + (\beta_n \rho^{n} + \delta_n \rho^{-n}) \operatorname{sen} n\theta$$

donde

$$\alpha_n = A_n C_n \qquad \beta_n = B_n C_n \qquad \gamma_n = A_n D_n \qquad \text{y} \qquad \delta_n = B_n D_n$$

6.13 - Solución de Ecuaciones de Derivadas Parciales, por medio de la Transformada de Laplace.

La Transformada de Laplace constituye un auxiliar muy valioso para resolver Ecuaciones Diferenciales. Aquí estudiaremos cómo resolver, con su ayuda, Ecuaciones de Derivadas Parciales.

Sea una ecuación diferencial como la siguiente:

$$a(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} + c(x)\, \varphi(x,t) +$$

$$+ d(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} + g(x) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = 0 \qquad (6.68)$$

Hallaremos ante todo su transformada de Laplace, en el dominio de la variable t (Dominio temporal). Para una mayor sencillez, iremos calculando una a una las transformadas de cada término, y luego aplicaremos la propiedad de la suma de transformadas:

$$\mathsf{L} \left\{ a(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \right\} = \int_0^{\infty} a(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{-st} dt = a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathsf{L} \left\{ \varphi(x,t) \right\}$$

Observemos que para el cálculo de esta transformada, hemos tenido en cuenta en primer lugar que la operación de transformar involucra el dominio del tiempo, t, y por lo tanto es independiente respecto de la variable x. En el último paso, además, hemos invertido el orden de integración y derivación.

De modo semejante se obtiene la transformada del segundo término. O sea

$$\mathsf{L} \left\{ b(x) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \right\} = \int_0^{\infty} b(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} e^{-st} dt = b(x) \frac{\partial}{\partial x} \mathsf{L} \left\{ \varphi(x,t) \right\}$$

A continuación, calcularemos la transformada de los términos que contienen derivadas parciales respecto de t:

$$\mathcal{L}\left\{ d(x)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\} = \int_0^\infty d(x)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, e^{-st}\, dt =$$

$$\therefore \qquad \mathcal{L}\left\{ d(x)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\} = d(x)\left(s^2\,\mathcal{L}\{\varphi(x,t)\} - s\,\varphi(x,0) - \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial t} \right)$$

A su vez

$$\mathcal{L}\left\{ g(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = \int_0^\infty g(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, g^{-st}\, dt = g(x)\left(s\,\mathcal{L}\{\varphi(x,t)\} - \varphi(x,0) \right)$$

Para simplificar las ecuaciones que siguen, utilizaremos en adelante la forma usual de denominar a la transformada como una función de s, es decir:

$$\mathcal{L}\{ f(x,t) \} = F(s)$$

En este caso:

$$\Phi(x,s) = \mathcal{L}\{ \varphi(x,t) \} = \int_0^\infty \varphi(x,t)\, e^{-st}\, dt$$

Con esta simbología, y reemplazando en la ecuación diferencial (6.68) los valores obtenidos hasta aquí, la misma queda representada por la igualdad:

$$a(x)\,\frac{\partial}{\partial x^2}\,\Phi(x,s) + b(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi(x,s) + c(x)\,\Phi(x,s) +$$

$$+\ d(x)\left(s^2\,\Phi(x,s) - s\,\varphi(x,0) - \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial t} \right) +$$

$$+\ e(x)\left(s\,\Phi(x,s) - \varphi(x,0) \right) = 0$$

La única derivada respecto de t que aparece aquí es nula, porque la primitiva, φ (x, 0), es función de x solamente. Todas las demás derivadas lo son respecto de una única variable, x.

Por tanto, suprimida aquella, podemos considerar a las restantes como derivadas totales respecto de x, con lo cual la ecuación diferencial se convierte, en el dominio transformado, en una ecuación diferencial ordinaria, que se deberá resolver como tal:

$$a(x)\,\frac{d}{d x^2}\,\Phi(x,s) + b(x)\,\frac{d}{d x}\,\Phi(x,s) + c(x)\,\Phi(x,s) +$$

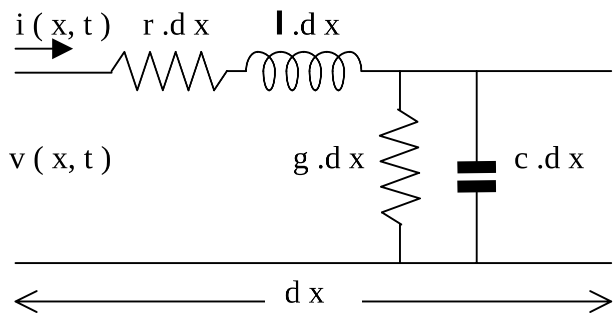
$$+\ d(x)\left(s^2\,\Phi(x,s) - s\,\varphi(x,0) \right) + e(x)\left(s\,\Phi(x,s) - \varphi(x,0) \right) = 0$$

Ejemplo 1:

Como primer ejemplo analizaremos las ecuaciones de una línea de transmisión, que fueron históricamente conocidas como *Ecuaciones Telegráficas*, porque definen el comportamiento de la tensión y corriente eléctricas, en función de los parámetros físicos de un par de conductores de cobre, como los utilizados en los sistemas alámbricos de comunicaciones.

Las relaciones entre la tensión y la intensidad de la corriente a lo largo de una tal línea de transmisión de energía eléctrica satisfacen (Ver la figura a continuación), el sistema de ecuaciones siguiente:

Modelo matemático de una línea de transmisión de Energía Eléctrica



$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = r \cdot i(x,t) + l \, \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g \cdot v(x,t) + c \, \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

En estas ecuaciones, l, c, r y g designan respectivamente a la inductancia, capacidad, resistencia y conductancia eléctrica de un tramo de línea de longitud x igual a la unidad (En el sistema MKS ó Técnico de unidades, dicha unidad es el metro, como sabemos).

La primera de las ecuaciones representa la caída de tensión a lo largo del tramo diferencial de longitud de la línea, que obviamente es igual a la caída que se produce sobre los componentes en serie: l y r. La segunda indica que la variación de la corriente a lo largo del tramo diferencial de línea es igual a la corriente que se deriva a través de los componentes en paralelo: g y c.

Para facilitar la escritura, en adelante escribiremos estas mismas ecuaciones en forma sintética, como a continuación:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = r \cdot i + l \, \dfrac{\partial i}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial i}{\partial x} = g \cdot v + c \, \dfrac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \qquad (6.69)$$

El problema consiste en hallar las funciones v (x, t) e i (x, t), que dan los valores de la tensión y corriente en cada punto de la línea, y en cada instante.

Si bien estas ecuaciones pueden resolverse sin problemas en el campo de las variables x y t, aquí recurriremos, a manera de ejemplo, al auxilio de la transformada de Laplace. La idea consiste en redefinir las ecuaciones de modo que aparezca una sola variable independiente en cada una de ellas. Empezamos por derivar la primera respecto de x y la segunda respecto de t:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\,\frac{\partial i}{\partial x} + \mathbf{l}\,\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} = g\,\frac{\partial v}{\partial t} + c\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Ahora reemplazamos la segunda en la primera:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\,\frac{\partial i}{\partial x} + \mathbf{l}\,g\,\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{l}\,c\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Tomando para

$$\frac{\partial i}{\partial x}$$

el valor definido por la (6.69), obtendremos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\,g\,.\,v + r\,c\,\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{l}\,g\,\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{l}\,c\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

o, agrupando términos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\,g\,.\,v + (r\,c + \mathbf{l}\,g)\,\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{l}\,c\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{6.70}$$

Procediendo de modo absolutamente similar en el caso de la intensidad de la corriente, i (x, t), es posible hallar la ecuación siguiente, simétrica de la anterior:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = r\,g\,.\,i + (r\,c + \mathbf{l}\,g)\,\frac{\partial i}{\partial t} + \mathbf{l}\,c\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{6.71}$$

A continuación, en cada una de ellas, aplicaremos la Transformación de Laplace. Pero previamente, para facilitar la escritura, introduciremos la notación simplificada siguiente:

$$\mathcal{L}\,\{\, v\,(x, t)\,\} = V\,(x, s) = V$$

y $$\mathcal{L}\,\{\, i\,(x, t)\,\} = I\,(x, s) = I$$

Y también:

$$v_o = v(0) \qquad v'_o = \frac{d\,v(0)}{d\,t}$$

Con tales simplificaciones la ecuación resultante en el caso de la diferencia de potencial, V (x,t), queda así:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = r g . V + (r c + \lambda g)(s V - v_o) + \lambda c (s^2 V - s v_o - v'_o)$$

Reagrupamos los términos en V, y tenemos:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} - (r g + r c s + \lambda g s + \lambda c s^2) V + \lambda (g + c s) v_o + \lambda c v'_o = 0$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2 V}{d x^2} - (r + \lambda s)(g + c s) V + \lambda (g + c s) v_o + \lambda c v'_o = 0$$

Esta ecuación, en el dominio de la variable de Laplace, es como vemos una ecuación diferencial ordinaria. Para resolverla, bastará hallar la primitiva correspondiente.

En el caso de la corriente, se arriba a una ecuación equivalente:

$$\frac{d^2 I}{d x^2} - (r + \lambda s)(g + c s) I + c (r + \lambda s) i_o + \lambda c i'_o = 0$$

Cuando la línea puede ser considerada sin pérdidas, es decir, cuando la resistencia específica (Resistencia por unidad de longitud) del conductor es despreciable, y la aislación entre ambos conductores es muy grande, es decir

$$r \cong 0 \qquad y \qquad g \cong 0$$

las ecuaciones anteriores se simplifican así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 V}{d\, x^2} - \lambda c \,(s^2 V - s v_o - v'_o) = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2 I}{d\, x^2} - \lambda c \,(s^2 I - s i_o - i'_o) = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 2:

Ecuación de las ondas (Ecuación de D'Alembert):

La ecuación:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

debida a D'Alembert, es conocida como Ecuación de las ondas. Más arriba hemos resuelto en la forma tradicional la ecuación de la cuerda vibrante, enteramente similar[1] a la que ahora encararemos recurriendo a la transformada de Laplace. El empleo ahora de la Transformada se convierte así en un medio idóneo de comparación entre ambas formas de encontrar la solución.

Supongamos que las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\varphi(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, 0) = 0$$

y que las condiciones de contorno son, por su parte:

$$\varphi(0, t) = \nu(t)$$

$$\varphi(\infty, t) = 0$$

Al aplicar la transformada de Laplace, resulta:

$$\Phi(x, s) = \mathrm{L}\{\varphi(x, t)\} = \int_0^\infty \varphi(x, t)\, e^{-st}\, dt$$

y, si derivamos bajo el signo de integral, obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}\, e^{-st}\, dt = \nu^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}\, e^{-st}\, dt$$

O, cambiando el orden de derivación e integración en el segundo miembro:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}\, e^{-st}\, dt = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty \varphi(x, t)\, e^{-st}\, dt$$

Obsérvese que este último paso está plenamente justificado porque, al no ser e^{-st} función de x, a efectos de la operación "derivada respecto de x", dicha exponencial se comporta como una constante que multiplica a $\varphi(x, t)$.

El primer miembro de la última ecuación es justamente la transformada Laplace de la derivada segunda de $\varphi(x, t)$, mientras que la última integral es la transformada Laplace de la misma función.

Podemos ahora formular la siguiente igualdad:

---

[1] Similitud lógica si consideramos que el movimiento de la cuerda vibrante, al ser dejada en libertad, consiste en una oscilación amortiguada alrededor de la posición de equilibrio.

$$s^2 \, \Phi(x,s) - s\,\varphi(x,0) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0) = \nu^2 \frac{\partial^2 \Phi(x,s)}{\partial x^2}$$

Aplicando aquí las condiciones iniciales, queda finalmente

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{\nu^2}\,\Phi(x,s) = 0$$

En el dominio de la transformada Laplace, ésta es una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución es:

$$\Phi(x,s) = A\, e^{\frac{s}{v}} + B\, e^{-\frac{s}{v}x}$$

Para obtener los valores de A y B, recurrimos a las condiciones de contorno que hemos especificado para el problema, es decir:

$$\varphi(0,t) = \nu(t)$$

cuya transformada es

$$\Phi(0,s) = \mathrm{L}\{\nu(t)\} = V(s)$$

y $\qquad \varphi(\infty,t) = 0$

de donde:

$$\Phi(\infty,s) = 0$$

Reemplazando estos valores en la solución de la ecuación diferencial, resulta:

$$\Phi(0,s) = A\,e^{0} + B\,e^{0} = A + B = V(s)$$

y $\qquad \Phi(\infty,s) = A\,e^{\infty} + B\,e^{-\infty} = A\,e^{\infty} = 0$

De este sistema se desprende que

$$A = 0 \qquad y \qquad B = V(s)$$

Con lo cual, la solución para nuestro problema particular, es decir, para las condiciones de contorno elegidas,se simplifica así:

$$\Phi(x,s) = V(s)\; e^{-\frac{s}{v}x}$$

Para encontrar la función primitiva correspondiente, en las tablas de transformadas encontramos la siguiente:

$$\mathrm{L}^{-1}\{e^{-a\,s}\} = \delta(t-a)\,.\,H(t-a)$$

Aplicandola a nuestro caso, y teniendo en cuenta además que la primitiva de un producto de transformadas es igual al producto de convolución entre las primitivas de los factores, obtenemos:

$$\varphi(x,t) = \nu(t) \ast \left[\delta\left(t - \frac{x}{\nu}\right) . H\left(t - \frac{x}{\nu}\right)\right]$$

Finalmente, de acuerdo con los valores que toma la función de Heaviside, según que el argumento sea positivo o negativo, llegamos al resultado siguiente:

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} = \nu(t) \ast \delta\left(t - \dfrac{x}{\nu}\right) & \text{si} \quad t \geq \dfrac{x}{\nu} \\ = 0 & \text{si} \quad t < \dfrac{x}{\nu} \end{cases}$$

6.14 - Problemas.

6.14.1 - Dada la familia de funciones identificada por la ecuación: $\Phi = a x + b y + z = 2 + i$, en la cual a y b son dos parámetros que individualizan a cada miembro de la familia, y z es función de x e y, se pide: Expresar dicha ecuación en forma implícita y hallar una ecuación diferencial que represente a la familia.

Solución:

$$z = z(x, y) = 2 + i - a x - b y$$

Forma implícita: $F(x, y, z, a, b) = a x + b y + z - (2 + i) = 0$

Las derivadas parciales de F respecto de x e y son, respectivamente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = a + \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 & \therefore \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = -a \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = b + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 & \therefore \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -b \end{cases}$$

Reemplazando en la forma implícita hallamos la ecuación diferencial buscada:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - (2 + i)$$

6.14.2 - Dada la ecuación $\Phi = a z + b x y = 0$, en la cual z es función de x e y, se pide expresarla como ecuación diferencial.

$$\text{R:} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b}{a}(x + y)$$

6.14.3 - Sea la familia de funciones dada por la ecuación: $\Phi = \Phi(f, g) = 0$, en la cual $f = z + 2x$, $g = z - y^2$, y además, z es función de x e y, se pide:

a) Hallar la ecuación diferencial de la familia.

Solución: Según la ec. 6.17

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}}$$

Aquí:

$$\frac{2 + z'_x}{0 + z'_y} = \frac{0 + z'_x}{-2y + z'_y} \qquad \therefore \qquad -4y - 2y\,z'_x + 2z'_y = 0$$

$$\text{R:} \quad \frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 2y$$

b) Verificar el cumplimiento de la ecuación anterior para

$\Phi = f^2 - g^2 = 0$

Solución:

$$f^2 - g^2 = z^2 + 4xz + 4x^2 - z^2 + 2zy^2 - y^4 = 0$$

$$4xz + 2zy^2 = y^4 - 4x^2$$

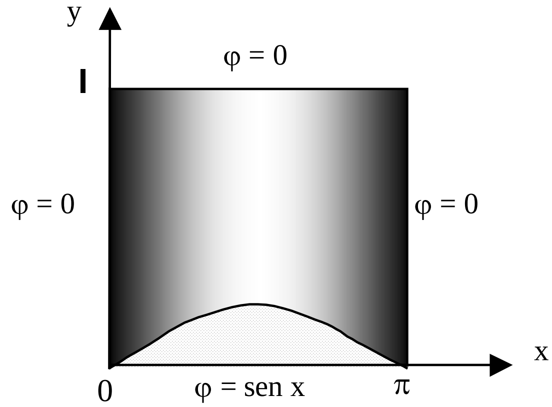
$$\therefore \qquad z = \frac{y^4 - 4x^2}{4x + 2y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{y^4 - 4x^2}{y^2 + 2x} = \frac{y^2 - 2x}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = y - y(-1) = 2y$$

c) Verificar la misma ecuación para $\Phi = f + 2g = 0$

d) Verificar la misma ecuación cuando $\Phi = e^f - e^{-g} = 0$

6.14.4 - Ecuación de Laplace, o del Potencial. Sea una placa rectangular, delgada y uniforme, como la de la figura, conductora del calor, en uno de cuyos bordes el potencial calórico φ aplicado responde a una función senoidal, mientras que los otros tres se mantienen a potencial cero:



Se pide hallar la ley de distribución del potencial calórico sobre la placa.

Solución: La Ecuación diferencial de Laplace para el potencial expresa:

$$\nabla^2 \varphi (x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por el método de separación de variables:

$$\varphi (x, y) = X (x) \, . \, Y (y)$$

Al reemplazar en la ecuación de Laplace, se obtiene:

$$Y (y) \, . \, X'' (x) + X (x) \, . \, Y'' (x) = 0$$

De aquí se llega fácilmente a la siguiente igualdad entre razones, que denominaremos λ^2:

$$\frac{Y''}{Y} = - \frac{X''}{X} = \lambda^2$$

Y a partir de aquí podemos establecer un sistema de ecuaciones diferenciales, cada una de ellas de una única variable:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ Y'' - \lambda^2 Y = 0 \end{cases}$$

La solución de la primera de estas ecuaciones puede ser del tipo:

$$X (x) = A \operatorname{sen} (\lambda x) + B \cos (\lambda x)$$

Y la de la segunda:

$$Y (x) = C e^{\lambda y} + D e^{- \lambda y}$$

Por tanto:

$$\varphi(x, y) = [A \operatorname{sen}(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \cdot (C e^{\lambda y} + D e^{-\lambda y})$$

$$\varphi(x, y) = (M e^{\lambda y} + N e^{-\lambda y}) \operatorname{sen}(\lambda x) + (P e^{\lambda y} + Q e^{-\lambda y}) \cos(\lambda x)$$

Las condiciones de contorno indican que el potencial aplicado varía como la función seno

$$\varphi(x, 0) = \operatorname{sen} x$$

Por esto el término en coseno de x debe ser nulo. También es: $\lambda = 1$. La solución se reduce entonces a:

$$\varphi(x, y) = (M e^{y} + N e^{-y}) \operatorname{sen} x$$

Resta determinar los valores de las constantes M y N, para lo cual recurriremos de nuevo a las condiciones de contorno:

De $\varphi(x, 0) = \operatorname{sen} x$ resulta, al reemplazar $y = 0$ en la solución :

$$\varphi(x, 0) = (M + N) \operatorname{sen} x$$

Por lo que $\quad M + N = 1 \quad \therefore \quad N = 1 - M$

Por su parte, de $\varphi(x, l) = 0$, deducimos que

$$\varphi(x, l) = -(M e^{l} + N e^{-l}) \operatorname{sen} x = 0$$

Y de aquí: $\quad M e^{l} + (1 - M) e^{-l} = 0$

Despejamos M

$$M(e^{l} - e^{-l}) = -e^{-l}$$

$$\therefore \quad M = \frac{e^{-l}}{2 \operatorname{sh} l}$$

$$y \quad N = -\frac{e^{l}}{2 \operatorname{sh} l}$$

6.14.5 - Resolver el problema anterior pero con las condiciones de contorno siguientes:

a) $$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \operatorname{sen} \lambda x \\ \varphi(x, l) = 0 \\ \varphi(0, y) = 0 \\ \varphi(\pi/\lambda, y) = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \text{sen } x - \text{sen } 3x \\ \varphi(x, l) = 0 \\ \varphi(0, y) = 0 \\ \varphi(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

R: $$\varphi(x, y) = \frac{e^{(y-l)} - e^{-(y-l)}}{2 \text{ sh } l} \text{ sen } x - \frac{e^{3(y-l)} - e^{-3(y-l)}}{2 \text{ sh } 3l} \text{ sen } 3x$$

6.14.6 - Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de separación de variables:

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución:

$$z(x, y) = X(x) \, . \, Y(y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = Y X' \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = X Y'$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial obtenemos

$$Y X' + X Y' = 0, \quad \text{de donde}$$

$$\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda$$

Esta igualdad permite obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X' - \lambda X = 0 \\ Y' + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

Una solución de este sistema es: $X = a e^{\lambda x}$ e $Y = b e^{-\lambda y}$ y, por lo tanto:

$$z = X Y = a b e^{\lambda (x - y)} = c e^{\lambda (x - y)}$$

Nota: La simetría del sistema original implica que también es solución $z = d e^{\lambda (y - x)}$. *Por tanto, la solución completa será:*

$$z = c e^{\lambda (x - y)} + d e^{-\lambda (x - y)}$$

b) Hallar la solución general de la Ecuación de Laplace, en coordenadas rectangulares. (Véase el problema 6.14.4):

$$\nabla^2 z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

R: $z(x, y) = \sum_k (M_k e^{k\lambda y} + N_k e^{-k\lambda y}) \operatorname{sen} k\lambda x + (P_k e^{k\lambda y} + Q_k e^{-k\lambda y}) \cos k\lambda x$

c) $$\frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

R: $z(x, y) = k \cdot y^{\alpha} \cdot e^{\alpha x}$

Aplicaciones Matlab.

- *Solución de ecuaciones con derivadas parciales respecto de una sola variable independiente.*

```
» % Ejemplo: dz/dx = 2*y ^ 2*x
» syms  x  y
» z = 2*int('y ^ 2*x',x)
z =  y ^ 2*x ^ 2
» % Para obtener la solución debemos agregar una función arbitraria de y (Constante
      respecto de x):
» % z = y ^ 2*x ^ 2 + 2*f(y)
```

```
% Ecuación:  d2z/dx2 = A*x ^ 2*y (Apartado 6.7, ej. 1):
» syms  A  x  y
» dsolve ('Dz = A*x ^ 2*y','y')
ans =  1/2*A*x ^ 2*y ^ 2+C1
» % Nótese que C1 es una función de x (Eventalmente, una constante).
```

```
» % Ecuación: d2z/dx2+c*y = 0 (apartado 6.7, ej. 2)
» syms  z  x  a
» syms  y  c
» dsolve ('D2z + c*y', 'x')
ans =  -1/2*c*y*x ^ 2+C1+C2*x
» % Aquí,  C1 y C2 son funciones de y (Eventalmente, constantes).
```

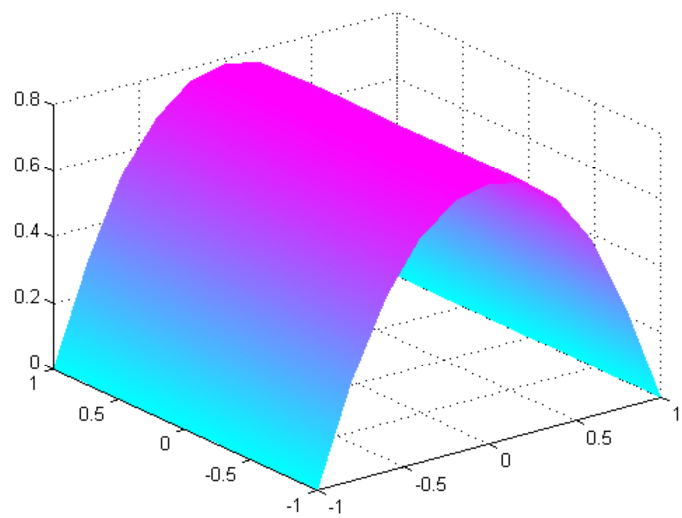
- *Resolver, por el método de separación de variables, la ecuación diferencial:*
  dz/dx + dz/dy = 0

```
» % Hacemos: z(x,y) = X(x)*Y(y)
» syms x  y  z  X  Y
» z = ' X(x) * Y(y)'
z =  X(x) * Y(y)
» Dz = ' Y*(DX,x)+ X*(DY,y)'
Dz = Y*(DX,x)+ X*(DY,y)
» % De aquí:  DX/X = - DY/Y = gamma,
» % A su vez, de esta ecuación podemos deducir el sistema:
» % [ DX =  gamma*X
» % [ DY = - gamma*Y
» Syms gamma
» DX =  gamma*X
DX =   gamma*X
» X = dsolve ('DX-gamma*X=0','x')
X =   exp(gamma*x)*C1
» DY = - gamma*Y
DY =   - gamma*Y
» Y = dsolve ('DY+gamma*Y=0','y')
Y =   exp ( - gamma*y)*C1
» z = X*Y
z =   exp (gamma*x)*C1 ^ 2*exp ( -gamma*y)
»
» % Verificación del resultado:
» syms   C1
» diff (z,x) + diff (z,y)
ans =  0
```

- *Ecuación de las ondas:*

```
» % Forma genérica de la Ecuación de las Ondas:  d2u/dt2-div(grad(u))=0.
» % Trataremos de resolver la ecuación en un cuadrado unitario.
» % Las figuras son claras al  respecto.
» % Definición del problema:
» % El algoritmo u = HYPERBOLIC (u0,ut0,,tlist,b,p,e,t,c,a,f,d) es la solucion Matlab
» % para ecuaciones del tipo:  f = d*d2u/dt2 - div(c*grad(u)) + a*u.
» % En este caso, se puede ver que: c=1, a=0, f=0, d=1
» c=1; a=0;  f=0;  d=1;
» % El algoritmo que define el cuadrado unitario es:
» g='squareg';
```

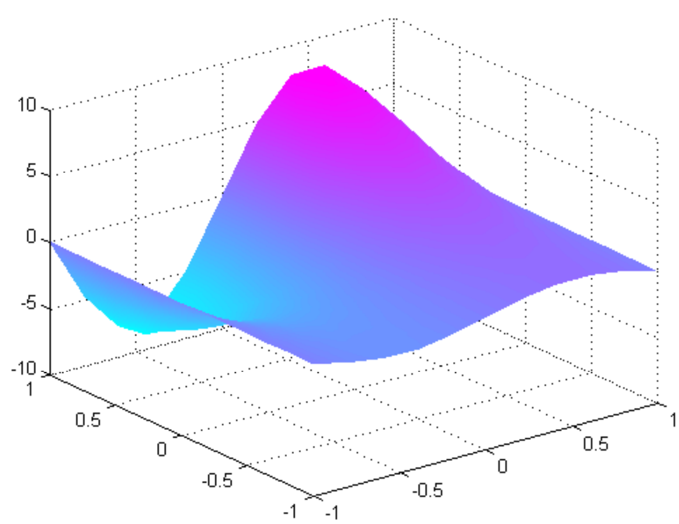
» % Condiciones de borde: Estableceremos que el valor sobre los lados izquierdo y derecho del cuadrado se mantiene en 0, y dejamos en libertad los lados inferior y superior.
» % El algoritmo a aplicar es, en tal caso,
» b='squareb3';
» % El programa resuelve la ecuación por aproximaciones sucesivas,
» % sobre una malla compuesta por cierta cantidad de triángulos ubicados en el plano.
» % Dicha malla está individualizada por los coeficientes p, e, t, de la fórmula para u.
» % Y el algoritmo para definir la malla (mesh) inicial es:
» [p,e,t]=initmesh('squareg');
» % Condiciones iniciales:
» x=p(1,:)';
y=p(2,:)';
» u0=atan(cos(pi/2*x));
ut0=3*sin(pi*x).*exp(sin(pi/2*y));
»
» % Para ilustración, representamos aquí la forma de la onda en el instante inicial:
» pdesurf(p,t,u0)
» grid
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»



» % Encararemos ahora la solución de la ecuación: Para ello debemos definir una tabla de tiempo y un parámetro n, así:
» % Solución de la ecuación hiperbólica:
» n = 21;
» tlist=linspace(0,5,n);
» uu=hyperbolic(u0,ut0,tlist,b,p,e,t,c,a,f,d);
Time: 0.25
Time: 0.5
Time: 0.75
Time: 1

Time: 1.25
Time: 1.5
Time: 1.75
Time: 2
Time: 2.25
Time: 2.5
Time: 2.75
Time: 3
Time: 3.25
Time: 3.5
Time: 3.75
Time: 4
Time: 4.25
Time: 4.5
Time: 4.75
Time: 5

428 successful steps
62 failed attempts
982 function evaluations
1 partial derivatives
142 LU decompositions
981 solutions of linear systems
»
» % Las filas de la matriz "u" son la solución de la ecuación. También, en este caso, la derivada en el momento inicial coincide con la forma de la onda al promediar el tiempo. Por tanto, nos da una imagen de la misma.
» % La representamos a continuación.
» ut0=3*sin(pi*x).*exp(sin(pi/2*y));
» pdesurf(p,t,ut0)
» grid



- *Matlab puede ser una excelente herramienta para verificar la solución de ecuaciones en general. Ejemplo, Verificar el resultado de la ecuación: dz/dx - y*dz/dy = 0. Problema 6.14.6c*

```
» %Verificar el resultado del problema 6.14.6 c.
» syms  z  x  y  k  alfa
» z = k*y ^ (alfa)*exp(alfa*x)
z = k*y ^ alfa*exp(alfa*x)
» dzx = diff (z, x)
dzx =  k*y ^ alfa*alfa*exp(alfa*x)
» dzy = diff (z,y)
dzy =  k*y ^ alfa*alfa/y*exp(alfa*x)
» dzx - y*dzy
ans =   0
```

- *Verificar la solución del problema 6.14.4*

```
» syms  x    y    l     lambda
» % Solución de la ecuación: X" + lambda ^ 2*X = 0
» dsolve ('D2X+lambda ^ 2*X','x')
ans =
C1*cos(lambda*x)+C2*sin(lambda*x)
»
» % Solución de la ecuación: Y" - lambda ^ 2*Y = 0
»  dsolve ('D2Y-lambda ^ 2*Y','y')
ans =
C1*exp(lambda*y)+C2*exp(-lambda*y)
»
» % Por las condiciones de contorno, es: lambda = 1, cos(lambda*x) = 0
» % Y también: f = (M*exp(lambda*y)+N*exp(-lambda*y))*sin(lambda*x)
» % Además, M + N = 1
» % Finalmente: f(x,l) = (M*exp (l) + N*exp(-l))*sin (x)
»
» M = exp(-l/2/sinh(-l))
M =    exp(1/2*l/sinh(l))
» N = 1 - M
N =    1 - exp(1/2*l/sinh(l))
»
» % La solución, f = f(x,y), es:
» f = (M*exp(y) + N*exp(-y))*sin(x)
f =
(exp(1/2*l/sinh(l))*exp(y)+(1-exp(1/2*l/sinh(l)))*exp(-y))*sin(x)
```

```
»
» % Verificación:
»
» diff(diff(f,x),x)
ans =
- (exp(1/2*l/sinh(l))*exp(y)+(1-exp(1/2*l/sinh(l)))*exp(-y))*sin(x)
» diff(diff(f,y),y)
ans =
(exp(1/2*l/sinh(l))*exp(y)+(1-exp(1/2*l/sinh(l)))*exp(-y))*sin(x)
» diff(diff(f,x),x) + diff(diff(f,y),y)
ans =     0
```

- *Verificar el Problema 3.14.5.b:*

```
» syms  x   y   l
» % Para una mejor visualización de los resultados hagamos: f = f1+f3:
» f1 = (exp(y-l)-exp(-(y-l)))*sin(x)/2/sinh(l)
f1 =  1/2*(exp(y-l)-exp(-y+l))*sin(x)/sinh(l)
» f3 = (exp(3*(y-l))-exp(-3*(y-l)))*sin(3*x)/2/sinh(3*l)
f3 =  1/2*(exp(3*y-3*l)-exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l)
» f = f1+f3;
» D2f1x = diff(diff(f1,x),x)
D2f1x =   -1/2*(exp(y-l)-exp(-y+l))*sin(x)/sinh(l)
» D2f1y = diff(diff(f1,y),y)
D2f1y =  1/2*(exp(y-l)-exp(-y+l))*sin(x)/sinh(l)
» D2f1 = diff(diff(f1,x),x) + diff(diff(f1,y),y)
ans =   0
»
» D2f3x = diff(diff(f3,x),x)
D2f3x =  -9/2*(exp(3*y-3*l)-exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l)
» D2f3y = diff(diff(f3,y),y)
D2f3y =  1/2*(9*exp(3*y-3*l)-9*exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l)
» D2f3 =diff(diff(f3,x),x) + diff(diff(f3,y),y)
D2f3 =   -9/2*(exp(3*y-3*l) - exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l)
         +1/2*(9*exp(3*y-3*l) - 9*exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l)
»
» %  = - 9/2* (exp(3*y-3*l) - exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l) +
         + 9/2*(exp(3*y-3*l)  - exp(-3*y+3*l))*sin(3*x)/sinh(3*l)  =  0
» %  Finalmente, D2fx + D2fy = (D2f1x + D2f3x) + (D2f1y + D2f3y)  =  0
```